El espacio de sucesiones acotadas

(un tema de la unidad “Espacios normados”)

Egor Maximenko,

`https://www.egormaximenko.com`

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

15 de septiembre de 2022

Objetivos: introducir el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ de sucesiones acotadas y demostrar su completez.

Objetivos: introducir el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ de sucesiones acotadas y demostrar su completez.

Prerrequisitos:

- operaciones lineales en $\mathbb{C}^\mathbb{N}$;
- espacios normados y espacios de Banach;
- el supremo de una función;
- el criterio de completez de espacios métricos en términos de sucesiones regulares de Cauchy;
- completez del espacio $\mathbb{C}$.

Espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Operaciones lineales en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Para $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$a + b := [a_k + b_k]_{k \in \mathbb{N}}, \qquad \lambda a := [\lambda a_k]_{k \in \mathbb{N}}.$$

Espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Operaciones lineales en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Para $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$a + b := \left[a_k + b_k\right]_{k\in\mathbb{N}}, \qquad \lambda a := \left[\lambda a_k\right]_{k\in\mathbb{N}}.$$

En otras palabras, $a + b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\lambda a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$(a + b)_k = a_k + b_k, \qquad (\lambda a)_k = \lambda a_k \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Operaciones lineales en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Para $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$a + b := \left[a_k + b_k\right]_{k\in\mathbb{N}}, \qquad \lambda a := \left[\lambda a_k\right]_{k\in\mathbb{N}}.$$

En otras palabras, $a + b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\lambda a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$(a + b)_k = a_k + b_k, \qquad (\lambda a)_k = \lambda a_k \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Ejercicio. Recordar la demostración que $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es un espacio vectorial.

Espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Por ejemplo, recordemos la demostración de la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}(\lambda(a+b))_k &= \lambda(a+b)_k = \lambda(a_k+b_k) = \lambda a_k + \lambda b_k \\ &= (\lambda a)_k + (\lambda b)_k = (\lambda a + \lambda b)_k.\end{aligned}$$

Espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Por ejemplo, recordemos la demostración de la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}(\lambda(a+b))_k &= \lambda(a+b)_k = \lambda(a_k+b_k) = \lambda a_k + \lambda b_k \\ &= (\lambda a)_k + (\lambda b)_k = (\lambda a + \lambda b)_k.\end{aligned}$$

El vector cero en el espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es la sucesión constante cero:

$$0_{\mathbb{N}} := \left[0\right]_{k\in\mathbb{N}} = (0,0,0,\ldots).$$

Espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Por ejemplo, recordemos la demostración de la propiedad distributiva:

$$
\begin{aligned}
(\lambda(a+b))_k = \lambda(a+b)_k = \lambda(a_k+b_k) = \lambda a_k + \lambda b_k \\
= (\lambda a)_k + (\lambda b)_k = (\lambda a + \lambda b)_k.
\end{aligned}
$$

El vector cero en el espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es la sucesión constante cero:

$$
0_{\mathbb{N}} \coloneqq \big[0\big]_{k\in\mathbb{N}} = (0,0,0,\ldots).
$$

Mostremos que $a + 0_{\mathbb{N}} = a$:

$$
(a+0_{\mathbb{N}})_k = a_k + (0_{\mathbb{N}})_k = a_k + 0 = a_k.
$$

El funcional N_∞

Definimos $N_\infty \colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to [0, +\infty]$,

$$N_\infty(a) := \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

Otra notación: N_{sup}.

El funcional N_∞

Definimos $N_\infty \colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to [0, +\infty]$,

$$N_\infty(a) := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

Otra notación: $N_{\sup}$.

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Entonces

$$N_\infty(a + b) \leq N_\infty(a) + N_\infty(b).$$

El funcional N_∞

Definimos $N_\infty \colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to [0, +\infty]$,

$$N_\infty(a) := \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

Otra notación: N_{sup}.

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Entonces

$$N_\infty(a + b) \le N_\infty(a) + N_\infty(b).$$

Idea de demostración. Para cada k en $\mathbb{N}$, $\quad |a_k + b_k| \le |a_k| + |b_k| \le N_\infty(a) + N_\infty(b)$. $\square$

El funcional N_∞

$$N_\infty(a) := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

El funcional N_∞

$$N_\infty(a) := \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$N_\infty(\lambda a) = |\lambda|\, N_\infty(a)$$

El funcional N_∞

$$N_\infty(a) := \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$N_\infty(\lambda a) = |\lambda|\, N_\infty(a)$$

Ejercicio. Demostrar que

$$N_\infty(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0_{\mathbb{N}}.$$

El funcional N_∞

$$N_\infty(a) := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$N_\infty(\lambda a) = |\lambda| \, N_\infty(a)$$

Ejercicio. Demostrar que

$$N_\infty(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0_{\mathbb{N}}.$$

Proposición

N_∞ es una norma extendida en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

El funcional N_∞

$$N_\infty(a) := \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$N_\infty(\lambda a) = |\lambda|\, N_\infty(a)$$

Ejercicio. Demostrar que

$$N_\infty(a) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0_{\mathbb{N}}.$$

Proposición

N_∞ es una norma extendida en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

A diferencia de una norma, una norma extendida puede tomar el valor $+\infty$.

El espacio de sucesiones acotadas

Definición

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \quad N_\infty(a) < +\infty \right\}.$$

Notación breve: ℓ^∞.

El espacio de sucesiones acotadas

Definición

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \quad N_\infty(a) < +\infty \right\}.$$

Notación breve: ℓ^∞.

Las operaciones lineales en ℓ^∞ se heredan de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

El espacio de sucesiones acotadas

Definición

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \quad N_\infty(a) < +\infty \right\}.$$

Notación breve: ℓ^∞.

Las operaciones lineales en ℓ^∞ se heredan de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

La norma en ℓ^∞ se define como la restricción de N_∞:

$$\|a\|_\infty := N_\infty(a) \qquad (a \in \ell^\infty).$$

Otra notación: $\|\cdot\|_{\sup}$.

$$\ell^\infty := \left\{ a \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \quad N_\infty(a) < +\infty \right\}, \qquad \|\cdot\|_\infty := N_\infty|_{\ell^\infty}.$$

$$\ell^\infty := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \quad N_\infty(a) < +\infty \right\}, \qquad \|\cdot\|_\infty := N_\infty|_{\ell^\infty}.$$

Proposición

ℓ^∞ es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La función $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en ℓ^∞.

$$\ell^\infty := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \quad N_\infty(a) < +\infty \right\}, \qquad \|\cdot\|_\infty := N_\infty|_{\ell^\infty}.$$

Proposición

ℓ^∞ es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La función $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en ℓ^∞.

Demostración. Se sigue del hecho que N_∞ es una norma extendida. $\square$

La bola unitaria cerrada en ℓ^∞ no es estrictamente convexa

Definición

Sea V un espacio normado complejo y sea $A \subseteq V$.

Se dice que A es estrictamente convexo si para cada a, b en A, tales que $a \neq b$, y cada λ en $(0, 1)$, se tiene que

$$(1-\lambda)a + \lambda b \in \operatorname{int}(A).$$

La bola unitaria cerrada en ℓ^∞ no es estrictamente convexa

Definición

Sea V un espacio normado complejo y sea $A \subseteq V$.

Se dice que A es estrictamente convexo si para cada a, b en A, tales que $a \neq b$, y cada λ en $(0, 1)$, se tiene que

$$(1 - \lambda)a + \lambda b \in \operatorname{int}(A).$$

Ejercicio. Construir $a, b \in \ell^\infty$ y $\lambda \in (0, 1)$ tales que

$$a \neq b, \qquad \|a\|_\infty = 1, \qquad \|b\|_\infty = 1, \qquad \|(1 - \lambda)a + \lambda b\|_\infty = 1.$$

Acotación de las componentes

Proposición

Sean $a \in \ell^\infty$, $m \in \mathbb{N}$. Entonces

$$|a_m| \leq \|a\|_\infty.$$

Demostración: se sigue de la definición del supremo.

La convergencia en ℓ^∞ es la convergencia uniforme

Ejercicio.

Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en ℓ^∞ y sea $b \in \ell^\infty$.

Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} \|a^{(k)} - b\|_\infty = 0$;

(b) $\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists j \in \mathbb{N} \qquad \forall k \geq j \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n^{(k)} - b_n| < \varepsilon.$

La convergencia en ℓ^∞ implica la convergencia puntual

Ejercicio.

Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en ℓ^∞, sea $b \in \ell^\infty$, y sea $m \in \mathbb{N}$.

Supongamos que

$$\lim_{k\to\infty} \|a^{(k)} - b\|_\infty = 0.$$

Demostrar que

$$\lim_{k\to\infty} |a_m^{(k)} - b_m| = 0.$$

La convergencia por componentes no implica la convergencia en ℓ^∞

Ejercicio. Construir una sucesión $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ en ℓ^∞ tal que

1. para cada m en $\mathbb{N}$, $\quad \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} = 0$;
2. para cada k en $\mathbb{N}$, $\quad \|a^{(k)}\|_\infty \geq 1$.

Las sucesiones de Cauchy en ℓ^∞ son sucesiones de Cauchy por componentes

Vamos a demostrar que el espacio ℓ^∞ es completo.

Necesitamos algunos hechos auxiliares.

Las sucesiones de Cauchy en ℓ^∞ son sucesiones de Cauchy por componentes

Vamos a demostrar que el espacio ℓ^∞ es completo.

Necesitamos algunos hechos auxiliares.

Ejercicio.

Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^∞, y sea $m \in \mathbb{N}$.

Demostrar que la sucesión $(a_m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Las sucesiones de Cauchy en ℓ^∞ son sucesiones de Cauchy por componentes

Vamos a demostrar que el espacio ℓ^∞ es completo.
Necesitamos algunos hechos auxiliares.

Ejercicio.
Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^∞, y sea $m \in \mathbb{N}$.
Demostrar que la sucesión $(a_m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Sugerencia: $|a_m^{(k)} - a_n^{(k)}| \le \|a_m - a_n\|_\infty.$

Primer lema:

regular de Cauchy en $\ell^\infty \Rightarrow$ regular de Cauchy por componentes

Lema

Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en ℓ^∞ y sea $m \in \mathbb{N}$.
Entonces $(a_m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Primer lema:
regular de Cauchy en $\ell^\infty \Rightarrow$ regular de Cauchy por componentes

Lema

Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en ℓ^∞ y sea $m \in \mathbb{N}$.
Entonces $(a_m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Para cada k en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(k+1)}|$$

Primer lema:

regular de Cauchy en $\ell^\infty \Rightarrow$ regular de Cauchy por componentes

Lema

Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en ℓ^∞ y sea $m \in \mathbb{N}$.
Entonces $(a_m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Para cada k en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(k+1)}| =$$

Primer lema:

regular de Cauchy en ℓ^∞ $\Rightarrow$ regular de Cauchy por componentes

Lema

Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en ℓ^∞ y sea $m \in \mathbb{N}$.
Entonces $(a_m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Para cada k en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(k+1)}| = \left|\left(a^{(k)} - a^{(k+1)}\right)_m\right|$$

Primer lema:

regular de Cauchy en $\ell^\infty \Rightarrow$ regular de Cauchy por componentes

Lema

Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en ℓ^∞ y sea $m \in \mathbb{N}$.
Entonces $(a_m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Para cada k en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(k+1)}| = \left|\left(a^{(k)} - a^{(k+1)}\right)_m\right| \leq$$

Primer lema:
regular de Cauchy en $\ell^\infty \Rightarrow$ regular de Cauchy por componentes

Lema

Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en ℓ^∞ y sea $m \in \mathbb{N}$.
Entonces $(a_m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Para cada k en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(k+1)}| = \left|\left(a^{(k)} - a^{(k+1)}\right)_m\right| \leq \|a^{(k)} - a^{(k+1)}\|_\infty$$

Primer lema:

regular de Cauchy en $\ell^\infty \Rightarrow$ regular de Cauchy por componentes

Lema

Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en ℓ^∞ y sea $m \in \mathbb{N}$.
Entonces $(a_m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Para cada k en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(k+1)}| = \left|\left(a^{(k)} - a^{(k+1)}\right)_m\right| \leq \|a^{(k)} - a^{(k+1)}\|_\infty <$$

Primer lema:

regular de Cauchy en $\ell^\infty \Rightarrow$ regular de Cauchy por componentes

Lema

Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en ℓ^∞ y sea $m \in \mathbb{N}$.
Entonces $(a_m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Para cada k en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(k+1)}| = \left|\left(a^{(k)} - a^{(k+1)}\right)_m\right| \le \|a^{(k)} - a^{(k+1)}\|_\infty < 2^{-k-1}. \qquad \square$$

Segundo lema:

regular Cauchy en ℓ^∞ + convergencia puntual $\Rightarrow$ convergencia en ℓ^∞

Lema

Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en ℓ^∞ y sea $b \in \ell^\infty$. Supongamos que

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} = b_m.$$

Entonces $b \in \ell^\infty$ y $\lim\limits_{k\to\infty} \|a^{(k)} - b\|_\infty = 0$.

Segundo lema:

regular Cauchy en ℓ^∞ + convergencia puntual $\Rightarrow$ converg. en ℓ^∞

Demostración. Para cada k, j en $\mathbb{N}$ con $j > k$ y cada m en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(j)}|$$

Segundo lema:

regular Cauchy en ℓ^∞ + convergencia puntual $\Rightarrow$ converg. en ℓ^∞

Demostración. Para cada k, j en $\mathbb{N}$ con $j > k$ y cada m en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(j)}| \leq$$

Segundo lema:

regular Cauchy en ℓ^∞ + convergencia puntual $\Rightarrow$ converg. en ℓ^∞

Demostración. Para cada k, j en $\mathbb{N}$ con $j > k$ y cada m en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(j)}| \leq \|a^{(k)} - a^{(j)}\|_\infty$$

Segundo lema:

regular Cauchy en ℓ^∞ + convergencia puntual $\Rightarrow$ converg. en ℓ^∞

Demostración. Para cada k, j en $\mathbb{N}$ con $j > k$ y cada m en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(j)}| \leq \|a^{(k)} - a^{(j)}\|_\infty <$$

Segundo lema:

regular Cauchy en ℓ^∞ + convergencia puntual $\Rightarrow$ converg. en ℓ^∞

Demostración. Para cada k, j en $\mathbb{N}$ con $j > k$ y cada m en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(j)}| \le \|a^{(k)} - a^{(j)}\|_\infty < 2^{-k}.$$

Segundo lema:

regular Cauchy en ℓ^∞ + convergencia puntual $\Rightarrow$ converg. en ℓ^∞

Demostración. Para cada k, j en $\mathbb{N}$ con $j > k$ y cada m en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(j)}| \leq \|a^{(k)} - a^{(j)}\|_\infty < 2^{-k}.$$

Pasamos al límite cuando $j \to \infty$:

Segundo lema:

regular Cauchy en ℓ^∞ + convergencia puntual $\Rightarrow$ converg. en ℓ^∞

Demostración. Para cada k, j en $\mathbb{N}$ con $j > k$ y cada m en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(j)}| \leq \|a^{(k)} - a^{(j)}\|_\infty < 2^{-k}.$$

Pasamos al límite cuando $j \to \infty$:

$$|a_m^{(k)} - b_m|$$

Segundo lema:

regular Cauchy en ℓ^∞ + convergencia puntual $\Rightarrow$ converg. en ℓ^∞

Demostración. Para cada k, j en $\mathbb{N}$ con $j > k$ y cada m en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(j)}| \leq \|a^{(k)} - a^{(j)}\|_\infty < 2^{-k}.$$

Pasamos al límite cuando $j \to \infty$:

$$|a_m^{(k)} - b_m| \leq$$

Segundo lema:

regular Cauchy en ℓ^∞ + convergencia puntual $\Rightarrow$ converg. en ℓ^∞

Demostración. Para cada k, j en $\mathbb{N}$ con $j > k$ y cada m en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(j)}| \leq \|a^{(k)} - a^{(j)}\|_\infty < 2^{-k}.$$

Pasamos al límite cuando $j \to \infty$:

$$|a_m^{(k)} - b_m| \leq 2^{-k}.$$

Segundo lema:
regular Cauchy en ℓ^∞ + convergencia puntual $\Rightarrow$ converg. en ℓ^∞

Demostración. Para cada k, j en $\mathbb{N}$ con $j > k$ y cada m en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(j)}| \leq \|a^{(k)} - a^{(j)}\|_\infty < 2^{-k}.$$

Pasamos al límite cuando $j \to \infty$:

$$|a_m^{(k)} - b_m| \leq 2^{-k}.$$

Como m es general,

Segundo lema:

regular Cauchy en ℓ^∞ + convergencia puntual $\Rightarrow$ converg. en ℓ^∞

Demostración. Para cada k, j en $\mathbb{N}$ con $j > k$ y cada m en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(j)}| \leq \|a^{(k)} - a^{(j)}\|_\infty < 2^{-k}.$$

Pasamos al límite cuando $j \to \infty$:

$$|a_m^{(k)} - b_m| \leq 2^{-k}.$$

Como m es general, $\quad N_\infty(a^{(k)} - b) \leq 2^{-k}.$

Segundo lema:

regular Cauchy en ℓ^∞ + convergencia puntual $\Rightarrow$ converg. en ℓ^∞

Demostración. Para cada k, j en $\mathbb{N}$ con $j > k$ y cada m en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(j)}| \leq \|a^{(k)} - a^{(j)}\|_\infty < 2^{-k}.$$

Pasamos al límite cuando $j \to \infty$:

$$|a_m^{(k)} - b_m| \leq 2^{-k}.$$

Como m es general, $\quad N_\infty(a^{(k)} - b) \leq 2^{-k}.$

En particular, $\quad N_\infty(b) \leq N_\infty(b - a^{(k)}) + N_\infty(a^{(1)}) < 2^{-1} + \|a^{(1)}\|_\infty.$

Segundo lema:
regular Cauchy en ℓ^∞ + convergencia puntual $\Rightarrow$ converg. en ℓ^∞

Demostración. Para cada k, j en $\mathbb{N}$ con $j > k$ y cada m en $\mathbb{N}$,

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(j)}| \le \|a^{(k)} - a^{(j)}\|_\infty < 2^{-k}.$$

Pasamos al límite cuando $j \to \infty$:

$$|a_m^{(k)} - b_m| \le 2^{-k}.$$

Como m es general, $\quad N_\infty(a^{(k)} - b) \le 2^{-k}$.

En particular, $\quad N_\infty(b) \le N_\infty(b - a^{(k)}) + N_\infty(a^{(1)}) < 2^{-1} + \|a^{(1)}\|_\infty$.

De aquí se sigue que $b \in \ell^\infty$ y $\|a^{(k)} - b\|_\infty \to 0$ cuando $k \to \infty$. $\square$

Completez del espacio ℓ^∞

Teorema

ℓ^∞ es un espacio de Banach.

Completez del espacio ℓ^∞

Teorema

ℓ^∞ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en ℓ^∞.

Completez del espacio ℓ^∞

Teorema

ℓ^∞ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en ℓ^∞.

Por el primer lema, para cada m en $\mathbb{N}$, la sucesión $(a_m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Completez del espacio ℓ^∞

Teorema

ℓ^∞ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en ℓ^∞.

Por el primer lema, para cada m en $\mathbb{N}$, la sucesión $(a_m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Como $\mathbb{C}$ es completo, para cada m en $\mathbb{N}$ existe b_m en $\mathbb{C}$ tal que $a_m^{(k)} \to b_m$ cuando $k \to \infty$.

Completez del espacio ℓ^∞

Teorema

ℓ^∞ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en ℓ^∞.

Por el primer lema, para cada m en $\mathbb{N}$, la sucesión $(a_m^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Como $\mathbb{C}$ es completo, para cada m en $\mathbb{N}$ existe b_m en $\mathbb{C}$ tal que $a_m^{(k)} \to b_m$ cuando $k \to \infty$.

Por el segundo lema, $b \in \ell^\infty$ y $\|a^{(k)} - b\|_\infty \to 0$ cuando $k \to \infty$. $\square$