El espacio de transformaciones lineales acotadas
(un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

1 de diciembre de 2022

Plan

Objetivos

- Dados dos espacios normados complejos V y W, introducir el espacio normado $\mathcal{B}(V, W)$ de las transformaciones lineales acotadas $V \to W$.
- Demostrar que si W es completo, entonces $\mathcal{B}(V, W)$ es completo.
- Demostrar la siguiente desigualdad para la norma de la composición:

$$\|ST\| \le \|S\| \, \|T\|.$$

Prerrequisitos

- Conjuntos acotados en espacios métricos y normados.
- Criterio de continuidad de una transformación lineal.
- Varias fórmulas equivalentes para la norma de una transformación lineal.
- Operaciones con transformaciones lineales en espacios vectoriales.

Criterio de continuidad de una transf. lineal (repaso)

Proposición

Sean V y W espacios normados complejos y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) T es acotada: $\exists C \geq 0 \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \leq C\,\|x\|_V$.

(b) T es Lipschitz continua.

(c) T es uniformemente continua.

(d) T es continua.

(e) T es continua en el punto 0_V.

(f) $T[B_V]$ es un conjunto acotado en W.

(g) $\sup\{\|Tx\|_W\colon \quad x \in V, \quad \|x\|_V \leq 1\} < +\infty$.

La norma de una transformación lineal (repaso)

Proposición

Sean V y W espacios normados complejos y sea $T\colon V \to W$ una transf. lineal.

$$N_1(T) := \sup_{\substack{x\in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W, \quad N_2(T) := \sup_{\substack{x\in V \\ \|x\|_V = 1}} \|Tx\|_W, \quad N_3(T) := \sup_{\substack{x\in V \\ x\neq 0_V}} \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V},$$

$$N_4(T) := \inf\{C \in [0,+\infty] \colon \quad \forall x \in V \quad \|Tx\|_W \le C\|x\|_V\}.$$

Entonces $N_1(T) = N_2(T) = N_3(T) = N_4(T)$.

Más aún, el ínfimo en la definición de $N_4(T)$ se alcanza, esto es,

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \le N_4(T)\,\|x\|_V.$$

Sean V, W espacios normados complejos.

Sean V, W espacios normados complejos.

$\mathcal{B}(V, W)$:= el conjunto de todas las transformaciones lineales acotadas $V \to W$.

Sean V, W espacios normados complejos.

$\mathcal{B}(V, W)$:= el conjunto de todas las transformaciones lineales acotadas $V \to W$.

La norma de una transformación lineal acotada T se define como

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W.$$

Otra notación: $\|T\|_{V \to W}$, $\|T\|_{\mathcal{B}(V,W)}$.

Sean V, W espacios normados complejos.

$\mathcal{B}(V, W)$:= el conjunto de todas las transformaciones lineales acotadas $V \to W$.

La norma de una transformación lineal acotada T se define como

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} \|Tx\|_W.$$

Otra notación: $\|T\|_{V \to W}$, $\|T\|_{\mathcal{B}(V,W)}$.

Si $T \in \mathcal{B}(V, W)$, entonces

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \le \|T\| \, \|x\|_V.$$

Una receta trivial para acotar por arriba $\|T\|$

Proposición

Sea $T\colon V \to W$ y sea $\gamma \geq 0$. Supongamos que

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq \gamma \, \|x\|_V.$$

Entonces $T \in \mathcal{B}(V, W)$ y $\|T\| \leq \gamma$.

Una receta trivial para acotar por arriba $\|T\|$

Proposición

Sea $T\colon V \to W$ y sea $\gamma \geq 0$. Supongamos que

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq \gamma\,\|x\|_V.$$

Entonces $T \in \mathcal{B}(V, W)$ y $\|T\| \leq \gamma$.

Demostración.

$$\|T\|$$

Una receta trivial para acotar por arriba $\|T\|$

Proposición

Sea $T\colon V \to W$ y sea $\gamma \geq 0$. Supongamos que

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq \gamma \, \|x\|_V.$$

Entonces $T \in \mathcal{B}(V, W)$ y $\|T\| \leq \gamma$.

Demostración.

$$\|T\| =$$

Una receta trivial para acotar por arriba $\|T\|$

Proposición

Sea $T: V \to W$ y sea $\gamma \geq 0$. Supongamos que

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq \gamma \|x\|_V.$$

Entonces $T \in \mathcal{B}(V, W)$ y $\|T\| \leq \gamma$.

Demostración.

$$\|T\| = N_1(T)$$

Una receta trivial para acotar por arriba $\|T\|$

Proposición

Sea $T\colon V \to W$ y sea $\gamma \geq 0$. Supongamos que

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq \gamma \|x\|_V.$$

Entonces $T \in \mathcal{B}(V, W)$ y $\|T\| \leq \gamma$.

Demostración.

$$\|T\| = N_1(T) =$$

Una receta trivial para acotar por arriba $\|T\|$

Proposición

Sea $T\colon V \to W$ y sea $\gamma \geq 0$. Supongamos que

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq \gamma \, \|x\|_V.$$

Entonces $T \in \mathcal{B}(V, W)$ y $\|T\| \leq \gamma$.

Demostración.

$$\|T\| = N_1(T) = \sup\left\{\|Tx\|_W\colon \quad x \in V \quad \|x\|_V \leq 1\right\}$$

Una receta trivial para acotar por arriba $\|T\|$

Proposición

Sea $T\colon V \to W$ y sea $\gamma \geq 0$. Supongamos que

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq \gamma\,\|x\|_V.$$

Entonces $T \in \mathcal{B}(V, W)$ y $\|T\| \leq \gamma$.

Demostración.

$$\|T\| = N_1(T) = \sup\{\|Tx\|_W \colon \quad x \in V \quad \|x\|_V \leq 1\} \leq$$

Una receta trivial para acotar por arriba $\|T\|$

Proposición

Sea $T\colon V\to W$ y sea $\gamma\ge 0$. Supongamos que

$$\forall x\in V\qquad \|Tx\|_W\le\gamma\,\|x\|_V.$$

Entonces $T\in\mathcal{B}(V,W)$ y $\|T\|\le\gamma$.

Demostración.

$$\|T\| = N_1(T) = \sup\{\|Tx\|_W\colon\quad x\in V\quad \|x\|_V\le 1\} \le \gamma.$$

Una receta trivial para acotar por arriba $\|T\|$

Proposición

Sea $T\colon V \to W$ y sea $\gamma \geq 0$. Supongamos que

$$\forall x \in V \qquad \|Tx\|_W \leq \gamma \|x\|_V.$$

Entonces $T \in \mathcal{B}(V, W)$ y $\|T\| \leq \gamma$.

Demostración.

$$\|T\| = N_1(T) = \sup\{\|Tx\|_W \colon \quad x \in V \quad \|x\|_V \leq 1\} \leq \gamma.$$

Ejercicio. Escribir otras demostraciones usando las fórmulas $N_2(T)$ y $N_3(T)$.

Plan

Operaciones lineales con las transformaciones lineales (repaso)

Sean V y W espacios vectoriales complejos,
$A, B \colon V \to W$ transformaciones lineales, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$(A + B)x := Ax + Bx, \qquad (\lambda A)x := \lambda(Ax).$$

Es fácil verificar que $A + B$ y λA son transformaciones lineales.

Operaciones lineales con transformaciones lineales acotadas

Proposición

Sean V, W espacios normados complejos, $A, B \in \mathcal{B}(V, W)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
Entonces $A + B \in \mathcal{B}(V, W)$, $\lambda A \in \mathcal{B}(V, W)$,

$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|, \qquad \|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|.$$

Demostración de la desigualdad $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Para cada x en V,

Demostración de la desigualdad $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Para cada x en V,

$$\|(A+B)x\|_W$$

Demostración de la desigualdad $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Para cada x en V,

$$\|(A + B)x\|_W =$$

Demostración de la desigualdad $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Para cada x en V,

$$\|(A + B)x\|_W \;=\; \|Ax + Bx\|_W$$

Demostración de la desigualdad $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Para cada x en V,

$$\|(A + B)x\|_W \;=\; \|Ax + Bx\|_W \;\leq$$

Demostración de la desigualdad $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Para cada x en V,

$$\|(A+B)x\|_W \;=\; \|Ax + Bx\|_W \;\leq\; \|Ax\|_W + \|Bx\|_W$$

Demostración de la desigualdad $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Para cada x en V,

$$
\begin{aligned}
\|(A+B)x\|_W &= \|Ax + Bx\|_W \leq \|Ax\|_W + \|Bx\|_W \\
&\leq
\end{aligned}
$$

Demostración de la desigualdad $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$

Para cada x en V,

$$\begin{aligned}\|(A+B)x\|_W &= \|Ax + Bx\|_W \le \|Ax\|_W + \|Bx\|_W \\ &\le \|A\|\,\|x\|_V + \|B\|\,\|x\|_V\end{aligned}$$

Demostración de la desigualdad $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Para cada x en V,

$$\|(A+B)x\|_W = \|Ax + Bx\|_W \leq \|Ax\|_W + \|Bx\|_W$$

$$\leq \|A\| \, \|x\|_V + \|B\| \, \|x\|_V \leq$$

Demostración de la desigualdad $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$

Para cada x en V,

$$\begin{aligned} \|(A+B)x\|_W &= \|Ax + Bx\|_W \le \|Ax\|_W + \|Bx\|_W \\ &\le \|A\|\,\|x\|_V + \|B\|\,\|x\|_V \le (\|A\| + \|B\|)\,\|x\|_V. \end{aligned}$$

Demostración de la desigualdad $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Para cada x en V,

$$\begin{aligned} \|(A+B)x\|_W &= \|Ax + Bx\|_W \leq \|Ax\|_W + \|Bx\|_W \\ &\leq \|A\|\,\|x\|_V + \|B\|\,\|x\|_V \leq (\|A\| + \|B\|)\,\|x\|_V. \end{aligned}$$

Esto implica que $A + B \in \mathcal{B}(V, W)$ y

Demostración de la desigualdad $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Para cada x en V,

$$\begin{aligned} \|(A+B)x\|_W &= \|Ax + Bx\|_W \leq \|Ax\|_W + \|Bx\|_W \\ &\leq \|A\|\,\|x\|_V + \|B\|\,\|x\|_V \leq (\|A\| + \|B\|)\,\|x\|_V. \end{aligned}$$

Esto implica que $A + B \in \mathcal{B}(V, W)$ y

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \le |\lambda| \, \|A\|$

Si $\lambda = 0$, entonces

$$\|\lambda A\| = 0, \qquad |\lambda| \, \|A\| = 0.$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \le |\lambda|\,\|A\|$

Si $\lambda = 0$, entonces

$$\|\lambda A\| = 0, \qquad |\lambda|\,\|A\| = 0.$$

Supongamos que $\lambda \neq 0$.

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \le |\lambda| \, \|A\|$

Si $\lambda = 0$, entonces

$$\|\lambda A\| = 0, \qquad |\lambda| \, \|A\| = 0.$$

Supongamos que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$\|(\lambda A)x\|_W$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \le |\lambda| \, \|A\|$

Si $\lambda = 0$, entonces

$$\|\lambda A\| = 0, \qquad |\lambda| \, \|A\| = 0.$$

Supongamos que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$\|(\lambda A)x\|_W =$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \le |\lambda| \, \|A\|$

Si $\lambda = 0$, entonces

$$\|\lambda A\| = 0, \qquad |\lambda| \, \|A\| = 0.$$

Supongamos que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$\|(\lambda A)x\|_W \; = \; \|\lambda(Ax)\|_W$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \le |\lambda| \, \|A\|$

Si $\lambda = 0$, entonces

$$\|\lambda A\| = 0, \qquad |\lambda| \, \|A\| = 0.$$

Supongamos que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$\|(\lambda A)x\|_W = \|\lambda(Ax)\|_W =$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \le |\lambda| \, \|A\|$

Si $\lambda = 0$, entonces

$$\|\lambda A\| = 0, \qquad |\lambda| \, \|A\| = 0.$$

Supongamos que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$\|(\lambda A)x\|_W = \|\lambda(Ax)\|_W = |\lambda| \, \|Ax\|_W$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \le |\lambda| \, \|A\|$

Si $\lambda = 0$, entonces

$$\|\lambda A\| = 0, \qquad |\lambda| \, \|A\| = 0.$$

Supongamos que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$\|(\lambda A)x\|_W \;=\; \|\lambda(Ax)\|_W \;=\; |\lambda| \, \|Ax\|_W \;\le$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \le |\lambda|\,\|A\|$

Si $\lambda = 0$, entonces

$$\|\lambda A\| = 0, \qquad |\lambda|\,\|A\| = 0.$$

Supongamos que $\lambda \ne 0$.

Para cada x en V,

$$\|(\lambda A)x\|_W \;=\; \|\lambda(Ax)\|_W \;=\; |\lambda|\,\|Ax\|_W \;\le\; |\lambda|\,(\|A\|\,\|x\|)$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \le |\lambda|\,\|A\|$

Si $\lambda = 0$, entonces

$$\|\lambda A\| = 0, \qquad |\lambda|\,\|A\| = 0.$$

Supongamos que $\lambda \ne 0$.

Para cada x en V,

$$\|(\lambda A)x\|_W \;=\; \|\lambda(Ax)\|_W \;=\; |\lambda|\,\|Ax\|_W \;\le\; |\lambda|\,(\|A\|\,\|x\|) \;=$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \le |\lambda|\,\|A\|$

Si $\lambda = 0$, entonces

$$\|\lambda A\| = 0, \qquad |\lambda|\,\|A\| = 0.$$

Supongamos que $\lambda \ne 0$.

Para cada x en V,

$$\|(\lambda A)x\|_W \;=\; \|\lambda(Ax)\|_W \;=\; |\lambda|\,\|Ax\|_W \;\le\; |\lambda|\,(\|A\|\,\|x\|) \;=\; (|\lambda|\,\|A\|)\,\|x\|.$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \le |\lambda| \, \|A\|$

Si $\lambda = 0$, entonces

$$\|\lambda A\| = 0, \qquad |\lambda| \, \|A\| = 0.$$

Supongamos que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$\|(\lambda A)x\|_W \;=\; \|\lambda(Ax)\|_W \;=\; |\lambda| \, \|Ax\|_W \;\le\; |\lambda| \, (\|A\| \, \|x\|) \;=\; (|\lambda| \, \|A\|) \, \|x\|.$$

Esto implica que $\lambda A \in \mathcal{B}(V, W)$ y

$$\|\lambda A\| \le |\lambda| \, \|A\|.$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \geq |\lambda| \, \|A\|$

Estamos suponiendo que $\lambda \neq 0$.

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \geq |\lambda| \, \|A\|$

Estamos suponiendo que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$|\lambda| \, \|Ax\|_W$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \ge |\lambda| \, \|A\|$

Estamos suponiendo que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$|\lambda| \, \|Ax\|_W =$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \geq |\lambda| \, \|A\|$

Estamos suponiendo que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$|\lambda| \, \|Ax\|_W = \|\lambda(Ax)\|_W$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \geq |\lambda| \, \|A\|$

Estamos suponiendo que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$|\lambda| \, \|Ax\|_W \; = \; \|\lambda(Ax)\|_W \; =$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \geq |\lambda|\,\|A\|$

Estamos suponiendo que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$|\lambda|\,\|Ax\|_W = \|\lambda(Ax)\|_W = \|(\lambda A)x\|_W$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \geq |\lambda| \, \|A\|$

Estamos suponiendo que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$|\lambda| \, \|Ax\|_W \; = \; \|\lambda(Ax)\|_W \; = \; \|(\lambda A)x\|_W \; \leq \; \|\lambda A\| \, \|x\|_V,$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \geq |\lambda| \, \|A\|$

Estamos suponiendo que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$|\lambda| \, \|Ax\|_W \;=\; \|\lambda(Ax)\|_W \;=\; \|(\lambda A)x\|_W \;\leq\; \|\lambda A\| \, \|x\|_V,$$

De aquí se sigue que

$$\|Ax\|_W$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \geq |\lambda| \, \|A\|$

Estamos suponiendo que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$|\lambda| \, \|Ax\|_W \; = \; \|\lambda(Ax)\|_W \; = \; \|(\lambda A)x\|_W \; \leq \; \|\lambda A\| \, \|x\|_V,$$

De aquí se sigue que

$$\|Ax\|_W \; \leq$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \geq |\lambda| \, \|A\|$

Estamos suponiendo que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$|\lambda| \, \|Ax\|_W \;=\; \|\lambda(Ax)\|_W \;=\; \|(\lambda A)x\|_W \;\leq\; \|\lambda A\| \, \|x\|_V,$$

De aquí se sigue que

$$\|Ax\|_W \;\leq\; \frac{\|\lambda A\|}{|\lambda|} \, \|x\|_V.$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \geq |\lambda| \, \|A\|$

Estamos suponiendo que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$|\lambda| \, \|Ax\|_W = \|\lambda(Ax)\|_W = \|(\lambda A)x\|_W \leq \|\lambda A\| \, \|x\|_V,$$

De aquí se sigue que

$$\|Ax\|_W \leq \frac{\|\lambda A\|}{|\lambda|} \|x\|_V.$$

Por lo tanto,

$$\|A\|_W$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \geq |\lambda| \, \|A\|$

Estamos suponiendo que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$|\lambda| \, \|Ax\|_W = \|\lambda(Ax)\|_W = \|(\lambda A)x\|_W \leq \|\lambda A\| \, \|x\|_V,$$

De aquí se sigue que

$$\|Ax\|_W \leq \frac{\|\lambda A\|}{|\lambda|} \|x\|_V.$$

Por lo tanto,

$$\|A\|_W \leq$$

Demostración de la desigualdad $\|\lambda A\| \geq |\lambda| \, \|A\|$

Estamos suponiendo que $\lambda \neq 0$.

Para cada x en V,

$$|\lambda| \, \|Ax\|_W \;=\; \|\lambda(Ax)\|_W \;=\; \|(\lambda A)x\|_W \;\leq\; \|\lambda A\| \, \|x\|_V,$$

De aquí se sigue que

$$\|Ax\|_W \;\leq\; \frac{\|\lambda A\|}{|\lambda|} \, \|x\|_V.$$

Por lo tanto,

$$\|A\|_W \;\leq\; \frac{1}{|\lambda|} \, \|\lambda A\|.$$

Demostración que si $\|A\| = 0$, entonces $A = 0_{V \to W}$

Proposición

Sean V, W espacios normados complejos, $A \in \mathcal{B}(V, W)$, $\|A\| = 0$.

Entonces $A = 0_{V \to W}$.

Demostración que si $\|A\| = 0$, entonces $A = 0_{V\to W}$

Proposición

Sean V, W espacios normados complejos, $A \in \mathcal{B}(V, W)$, $\|A\| = 0$.
Entonces $A = 0_{V\to W}$.

Demostración. En efecto, para cada v en V tenemos

$$\|Av\|_W$$

Demostración que si $\|A\| = 0$, entonces $A = 0_{V\to W}$

Proposición

Sean V, W espacios normados complejos, $A \in \mathcal{B}(V, W)$, $\|A\| = 0$.

Entonces $A = 0_{V\to W}$.

Demostración. En efecto, para cada v en V tenemos

$$\|Av\|_W \leq$$

Demostración que si $\|A\| = 0$, entonces $A = 0_{V\to W}$

Proposición

Sean V, W espacios normados complejos, $A \in \mathcal{B}(V, W)$, $\|A\| = 0$.
Entonces $A = 0_{V\to W}$.

Demostración. En efecto, para cada v en V tenemos

$$\|Av\|_W \;\le\; \|A\|\,\|v\|_V$$

Demostración que si $\|A\| = 0$, entonces $A = 0_{V\to W}$

Proposición

Sean V, W espacios normados complejos, $A \in \mathcal{B}(V, W)$, $\|A\| = 0$.
Entonces $A = 0_{V\to W}$.

Demostración. En efecto, para cada v en V tenemos

$$\|Av\|_W \;\leq\; \|A\|\,\|v\|_V \;=$$

Demostración que si $\|A\| = 0$, entonces $A = 0_{V\to W}$

Proposición

Sean V, W espacios normados complejos, $A \in \mathcal{B}(V, W)$, $\|A\| = 0$.
Entonces $A = 0_{V\to W}$.

Demostración. En efecto, para cada v en V tenemos

$$\|Av\|_W \;\le\; \|A\|\,\|v\|_V \;=\; 0,$$

Demostración que si $\|A\| = 0$, entonces $A = 0_{V\to W}$

Proposición

Sean V, W espacios normados complejos, $A \in \mathcal{B}(V, W)$, $\|A\| = 0$.
Entonces $A = 0_{V\to W}$.

Demostración. En efecto, para cada v en V tenemos

$$\|Av\|_W \;\le\; \|A\|\,\|v\|_V \;=\; 0,$$

así que $Av = 0_W$.

Demostración que si $\|A\| = 0$, entonces $A = 0_{V\to W}$

Proposición

Sean V, W espacios normados complejos, $A \in \mathcal{B}(V, W)$, $\|A\| = 0$. Entonces $A = 0_{V\to W}$.

Demostración. En efecto, para cada v en V tenemos

$$\|Av\|_W \;\le\; \|A\|\,\|v\|_V \;=\; 0,$$

así que $Av = 0_W$.

Esto significa que $A = 0_{V\to W}$.

Hemos demostrado el siguiente resultado.

Proposición

Sean V y W espacios normados complejos.

Entonces $\mathcal{B}(V, W)$ es un espacio normado complejo.

Hemos demostrado el siguiente resultado.

Proposición

Sean V y W espacios normados complejos.

Entonces $\mathcal{B}(V, W)$ es un espacio normado complejo.

Observación del profesor Nikolai Vasilevski:

la norma del operador, definida para medir sus propiedades individuales,

de manera sorprendente sirve también en el "contexto social" del espacio $\mathcal{B}(V, W)$.

Plan

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sea W un espacio de Banach complejo. Entonces $\mathcal{B}(V, W)$ es completo.

Demostración, inicio

Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{B}(V, W)$:

$$\|A_{k+1} - A_k\| \leq 2^{-k-1}.$$

Demostración, inicio

Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{B}(V, W)$:

$$\|A_{k+1} - A_k\| \leq 2^{-k-1}.$$

Dado x en V, mostremos que la sucesión $(A_k x)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

$$\|A_{k+1}x - A_k x\| = \|(A_{k+1} - A_k)x\| \leq \|A_{k+1} - A_k\|\,\|x\| \leq 2^{-k-1}\,\|x\|.$$

Demostración, inicio

Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{B}(V, W)$:

$$\|A_{k+1} - A_k\| \le 2^{-k-1}.$$

Dado x en V, mostremos que la sucesión $(A_k x)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

$$\|A_{k+1}x - A_k x\| = \|(A_{k+1} - A_k)x\| \le \|A_{k+1} - A_k\| \, \|x\| \le 2^{-k-1} \, \|x\|.$$

$$\text{si } m \ge n, \qquad \|A_m x - A_n x\| \le \sum_{k=n}^{m+1} \|A_{k+1}x - A_k x\| \le 2^{-n}\|x\|.$$

Demostración, inicio

Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{B}(V,W)$:

$$\|A_{k+1} - A_k\| \le 2^{-k-1}.$$

Dado x en V, mostremos que la sucesión $(A_k x)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

$$\|A_{k+1}x - A_k x\| = \|(A_{k+1} - A_k)x\| \le \|A_{k+1} - A_k\|\,\|x\| \le 2^{-k-1}\,\|x\|.$$

$$\text{si } m \ge n, \qquad \|A_m x - A_n x\| \le \sum_{k=n}^{m+1} \|A_{k+1}x - A_k x\| \le 2^{-n}\|x\|.$$

La sucesión $(A_k x)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en W, luego converge. $B(x) := \lim_{k\to\infty}(A_k x)$.

Demostración, continuación

Demostremos que B es lineal. Sean $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración, continuación

Demostremos que B es lineal. Sean $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} B(x+y) &= \lim_{k\to\infty} (A_k(x+y)) = \lim_{k\to\infty} (A_k x + A_k y) \\ &= \lim_{k\to\infty} (A_k x) + \lim_{k\to\infty} (A_k y) = B(x) + B(y), \end{aligned}$$

Demostración, continuación

Demostremos que B es lineal. Sean $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} B(x+y) &= \lim_{k\to\infty} (A_k(x+y)) = \lim_{k\to\infty} (A_k x + A_k y) \\ &= \lim_{k\to\infty} (A_k x) + \lim_{k\to\infty} (A_k y) = B(x) + B(y), \end{aligned}$$

$$B(\lambda x) = \lim_{k\to\infty} (A_k(\lambda x)) = \lim_{k\to\infty} (\lambda A_k x) = \lambda \lim_{k\to\infty} (A_k x) = \lambda\, B(x).$$

Hemos utilizado las siguientes propiedades:

Demostración, continuación

Demostremos que B es lineal. Sean $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} B(x+y) &= \lim_{k\to\infty} (A_k(x+y)) = \lim_{k\to\infty} (A_k x + A_k y) \\ &= \lim_{k\to\infty} (A_k x) + \lim_{k\to\infty} (A_k y) = B(x) + B(y), \end{aligned}$$

$$B(\lambda x) = \lim_{k\to\infty} (A_k(\lambda x)) = \lim_{k\to\infty} (\lambda A_k x) = \lambda \lim_{k\to\infty} (A_k x) = \lambda\, B(x).$$

Hemos utilizado las siguientes propiedades:

- $A_k v \to Bv$ para cada v en V,

Demostración, continuación

Demostremos que B es lineal. Sean $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$
\begin{aligned}
B(x+y) &= \lim_{k\to\infty}(A_k(x+y)) = \lim_{k\to\infty}(A_k x + A_k y) \\
&= \lim_{k\to\infty}(A_k x) + \lim_{k\to\infty}(A_k y) = B(x) + B(y),
\end{aligned}
$$

$$
B(\lambda x) = \lim_{k\to\infty}(A_k(\lambda x)) = \lim_{k\to\infty}(\lambda A_k x) = \lambda \lim_{k\to\infty}(A_k x) = \lambda\, B(x).
$$

Hemos utilizado las siguientes propiedades:

- $A_k v \to Bv$ para cada v en V,
- las transformaciones A_k son lineales,

Demostración, continuación

Demostremos que B es lineal. Sean $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} B(x+y) &= \lim_{k\to\infty} (A_k(x+y)) = \lim_{k\to\infty} (A_k x + A_k y) \\ &= \lim_{k\to\infty} (A_k x) + \lim_{k\to\infty} (A_k y) = B(x) + B(y), \end{aligned}$$

$$B(\lambda x) = \lim_{k\to\infty} (A_k(\lambda x)) = \lim_{k\to\infty} (\lambda A_k x) = \lambda \lim_{k\to\infty} (A_k x) = \lambda\, B(x).$$

Hemos utilizado las siguientes propiedades:

- $A_k v \to Bv$ para cada v en V,
- las transformaciones A_k son lineales,
- las operaciones lineales en W son continuas.

Demostración, final

Demostremos que B es acotado. Para cada m en $\mathbb{N}$,

$$\|A_m\| = \left\| A_1 + \sum_{k=1}^{m-1} (A_{k+1} - A_k) \right\| \leq \|A_1\| + \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-k-1} \leq \|A_1\| + 1.$$

Demostración, final

Demostremos que B es acotado. Para cada m en $\mathbb{N}$,

$$\|A_m\| = \left\| A_1 + \sum_{k=1}^{m-1} (A_{k+1} - A_k) \right\| \le \|A_1\| + \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-k-1} \le \|A_1\| + 1.$$

Dado x en V,

$$\|A_m x\|_W \le (\|A_1\| + 1)\,\|x\|_V.$$

Demostración, final

Demostremos que B es acotado. Para cada m en $\mathbb{N}$,

$$\|A_m\| = \left\| A_1 + \sum_{k=1}^{m-1} (A_{k+1} - A_k) \right\| \le \|A_1\| + \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-k-1} \le \|A_1\| + 1.$$

Dado x en V,

$$\|A_m x\|_W \le (\|A_1\| + 1)\, \|x\|_V.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$ y usamos el hecho que la norma en W es una función continua:

$$\|Bx\|_W \le (\|A_1\| + 1)\, \|x\|_V.$$

Demostración, final

Demostremos que B es acotado. Para cada m en $\mathbb{N}$,

$$\|A_m\| = \left\| A_1 + \sum_{k=1}^{m-1} (A_{k+1} - A_k) \right\| \le \|A_1\| + \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-k-1} \le \|A_1\| + 1.$$

Dado x en V,

$$\|A_m x\|_W \le (\|A_1\| + 1)\, \|x\|_V.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$ y usamos el hecho que la norma en W es una función continua:

$$\|Bx\|_W \le (\|A_1\| + 1)\, \|x\|_V.$$

Luego $\|B\| = N_4(B) \le \|A_1\| + 1$.

Otra demostración: usar series absolutamente convergentes

Ejercicio. Demostrar la proposición sobre la completez de $\mathcal{B}(V, W)$ de otra manera.
Usar el criterio de completez de espacios normados
en términos de series absolutamente convergentes.

La completez de W es una condición necesaria

Ejercicio. Supongamos que V, W son espacios normados, $V \neq \{0_V\}$, y el espacio $\mathcal{B}(V, W)$ es completo. Demostrar que W es completo.

Sugerencia: usar el teorema de Hahn–Banach.

Plan

Proposición

Sean V, W, X espacios normados complejos, $T \in \mathcal{B}(V, W)$, $S \in \mathcal{B}(W, X)$. Entonces $ST \in \mathcal{B}(V, X)$ y

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|.$$

Proposición

Sean V, W, X espacios normados complejos, $T \in \mathcal{B}(V, W)$, $S \in \mathcal{B}(W, X)$.
Entonces $ST \in \mathcal{B}(V, X)$ y

$$\|ST\| \le \|S\| \, \|T\|.$$

Demostración. Para cada v en V,

$$\|(ST)v\|_X$$

Proposición

Sean V, W, X espacios normados complejos, $T \in \mathcal{B}(V, W)$, $S \in \mathcal{B}(W, X)$.
Entonces $ST \in \mathcal{B}(V, X)$ y

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|.$$

Demostración. Para cada v en V,

$$\|(ST)v\|_X =$$

Proposición

Sean V, W, X espacios normados complejos, $T \in \mathcal{B}(V, W)$, $S \in \mathcal{B}(W, X)$.
Entonces $ST \in \mathcal{B}(V, X)$ y

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|.$$

Demostración. Para cada v en V,

$$\|(ST)v\|_X = \|S(T(v))\|_X$$

Proposición

Sean V, W, X espacios normados complejos, $T \in \mathcal{B}(V, W)$, $S \in \mathcal{B}(W, X)$.
Entonces $ST \in \mathcal{B}(V, X)$ y

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|.$$

Demostración. Para cada v en V,

$$\|(ST)v\|_X = \|S(T(v))\|_X \leq$$

Proposición

Sean V, W, X espacios normados complejos, $T \in \mathcal{B}(V, W)$, $S \in \mathcal{B}(W, X)$.
Entonces $ST \in \mathcal{B}(V, X)$ y

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|.$$

Demostración. Para cada v en V,

$$\|(ST)v\|_X = \|S(T(v))\|_X \leq \|S\| \, \|Tv\|_W$$

Proposición

Sean V, W, X espacios normados complejos, $T \in \mathcal{B}(V, W)$, $S \in \mathcal{B}(W, X)$. Entonces $ST \in \mathcal{B}(V, X)$ y

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|.$$

Demostración. Para cada v en V,

$$\|(ST)v\|_X = \|S(T(v))\|_X \leq \|S\| \, \|Tv\|_W \leq$$

Proposición

Sean V, W, X espacios normados complejos, $T \in \mathcal{B}(V, W)$, $S \in \mathcal{B}(W, X)$.
Entonces $ST \in \mathcal{B}(V, X)$ y

$$\|ST\| \le \|S\|\,\|T\|.$$

Demostración. Para cada v en V,

$$\|(ST)v\|_X = \|S(T(v))\|_X \le \|S\|\,\|Tv\|_W \le \|S\|\,\|T\|\,\|v\|_V.$$

Proposición

Sean V, W, X espacios normados complejos, $T \in \mathcal{B}(V, W)$, $S \in \mathcal{B}(W, X)$. Entonces $ST \in \mathcal{B}(V, X)$ y

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|.$$

Demostración. Para cada v en V,

$$\|(ST)v\|_X = \|S(T(v))\|_X \leq \|S\| \, \|Tv\|_W \leq \|S\| \, \|T\| \, \|v\|_V.$$

Luego $ST \in \mathcal{B}(V, X)$ y $\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$.