Prueba de Schur para operadores integrales, versión simplificada

Dados dos espacios de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ y una función medible $K \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathbb{C})$, bajo ciertas suposiciones adicionales se puede definir el *operador integral* $A_K \colon L^2(X, \mu) \to L^2(Y, \nu)$,

$$(A_K f)(x) \coloneqq \int_Y K(x, y)\, f(y)\, \mathrm{d}\nu(y).$$

Queremos demostrar una condición suficiente para que este operador esté bien definido y que sea acotado.

Objetivos. Demostrar una versión simplificada de la prueba de Schur que permite acotar operadores integrales en espacios L^2.

Prerrequisitos. funciones Lebesgue integrables, espacios L^p, teorema de Tonelli, desigualdad de Hölder, operadores lineales acotados.

1 Proposición. *Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida σ-finita, y sea $K \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathbb{C})$ tal que*

$$C_1 \coloneqq \sup_{x \in X} \int_Y |K(x, y)|\, \mathrm{d}\nu(y) < +\infty, \qquad C_2 \coloneqq \sup_{y \in Y} \int_X |K(x, y)|\, \mathrm{d}\mu(x) < +\infty.$$

Entonces se tienen las siguientes propiedades.

1. *Para cada f en $L^2(Y, \nu)$ y μ-casi todo x en X,*
$$\int_Y |K(x, y)|\, |f(y)|\, \mathrm{d}\nu(y) < +\infty. \tag{1}$$

2. *El operador integral $A_K \colon L^2(Y, \nu) \to L^2(X, \mu)$, definido mediante la siguiente regla, es acotado:*
$$(A_K f)(x) \coloneqq \int_Y K(x, y)\, f(y)\, \mathrm{d}\nu(y).$$

3. $\|A_K\| \le \sqrt{C_1 C_2}$.

Demostración. Primer paso. Sea $f \in L^2(Y,\nu)$. Denotemos la integral en (1) por $M_f(x)$. Para acotarla, aplicamos la desigualdad de Hölder con $p = 2$:

$$\begin{aligned}
M_f(x) &= \int_Y \sqrt{|K(x,y)|}\,\sqrt{|K(x,y)|}\,|f(y)|\,\mathrm{d}\nu(y) \\
&\le \left(\int_Y |K(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y)\right)^{1/2} \left(\int_Y |K(x,y)|\,|f(y)|^2\,\mathrm{d}\nu(y)\right)^{1/2} \\
&\le \sqrt{C_1}\left(\int_Y |K(x,y)|\,|f(y)|^2\,\mathrm{d}\nu(y)\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Segundo paso. Integremos la función M_f^2 sobre X y apliquemos el teorema de Tonelli:

$$\begin{aligned}
\int_X M_f(x)^2\,\mathrm{d}\mu(x) &\le C_1 \int_X \int_Y |K(x,y)|\,|f(y)|^2\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\le C_1 \int_Y \left(\int_X |K(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(x)\right) |f(y)|^2\,\mathrm{d}\nu(y) \\
&\le C_1 C_2 \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Conclusiones. Como $\int_X M_f^2\,\mathrm{d}\mu < +\infty$, concluimos que $M_f(x) < +\infty$ para μ-casi todo x en X, así que la función A_K está bien definida, salvo un conjunto de medida cero.

Usando la propiedad lineal de la integral es fácil verificar que el operador A_K es lineal. Más aún, como $|(A_K f)(x)| \le M_f(x)$, obtenemos que

$$\|(A_K f)\|_2 \le \sqrt{C_1 C_2}\,\|f\|_2^2.$$

Esto implica que A_K es acotado y $\|A_K\| \le \sqrt{C_1 C_2}$. $\square$

2 Ejercicio. Sean $(X,\mathcal{F},\mu)$, $(Y,\mathcal{G},\nu)$ espacio de medida finita:

$$\mu(X) < +\infty, \quad \nu(Y) < +\infty,$$

y sea $K\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ una función medible y esencialmente acotada:

$$K \in \mathcal{L}^\infty(X \times Y, \mu \times \nu).$$

Demostrar que A_K es un operador lineal y encontrar una cota superior para su norma.