

Funciones simples

(un tema del curso “Análisis real”)

Egor Maximenko

<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

13 de abril de 2021

Objetivos.

- Definir la noción de función simple.
- Estudiar su representación canónica y representaciones generalizadas.
- Establecer un criterio de medibilidad para funciones simples.

Prerrequisitos.

- La imagen de una función. La preimagen de un conjunto bajo una función.
- La partición de un conjunto.
- La función indicadora (característica) de un conjunto.
- Funciones medibles.

La imagen de una función, repaso (el conjunto de los valores de una función)

Sea $f: X \rightarrow Y$ una función.

$$f[X] :=$$

La imagen de una función, repaso (el conjunto de los valores de una función)

Sea $f: X \rightarrow Y$ una función.

$$f[X] := \{y \in Y : \exists x \in X \quad f(x) = y\}.$$

La imagen de una función, repaso (el conjunto de los valores de una función)

Sea $f: X \rightarrow Y$ una función.

$$f[X] := \{y \in Y : \exists x \in X \quad f(x) = y\}.$$

También se denota por $\text{im}(f)$ o por $\mathcal{R}(f)$.

Función simple

Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **simple** si su imagen $f[X]$ es un conjunto finito.

Función simple

Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **simple** si su imagen $f[X]$ es un conjunto finito.

Denotamos por $\mathcal{S}(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones simples $X \rightarrow Y$.

Función simple

Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **simple** si su imagen $f[X]$ es un conjunto finito.

Denotamos por $\mathcal{S}(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones simples $X \rightarrow Y$.

Vamos a trabajar con funciones simples positivas, reales o complejas:

$$\mathcal{S}(X, [0, +\infty[), \quad \mathcal{S}(X, \mathbb{R}), \quad \mathcal{S}(X, \mathbb{C}).$$

Función simple

Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **simple** si su imagen $f[X]$ es un conjunto finito.

Denotamos por $\mathcal{S}(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones simples $X \rightarrow Y$.

Vamos a trabajar con funciones simples positivas, reales o complejas:

$$\mathcal{S}(X, [0, +\infty[), \quad \mathcal{S}(X, \mathbb{R}), \quad \mathcal{S}(X, \mathbb{C}).$$

En todos estos casos, vamos a suponer que los valores de f son números finitos.

Función simple

Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **simple** si su imagen $f[X]$ es un conjunto finito.

Denotamos por $\mathcal{S}(X, Y)$ el conjunto de todas las funciones simples $X \rightarrow Y$.

Vamos a trabajar con funciones simples positivas, reales o complejas:

$$\mathcal{S}(X, [0, +\infty[), \quad \mathcal{S}(X, \mathbb{R}), \quad \mathcal{S}(X, \mathbb{C}).$$

En todos estos casos, vamos a suponer que los valores de f son números finitos.

Hablando de funciones simples, no permitimos los valores $+\infty$ ni $-\infty$.

Partición de un conjunto, repaso

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P} \subseteq 2^X$.

Se dice que \mathcal{P} es una **partición** de X , si se cumplen las siguientes condiciones.

Partición de un conjunto, repaso

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P} \subseteq 2^X$.

Se dice que \mathcal{P} es una **partición** de X , si se cumplen las siguientes condiciones.

$$\textcircled{1} \quad \bigcup_{A \in \mathcal{P}} A = X.$$

$$\textcircled{2} \quad \forall A, B \in \mathcal{P} \quad (A \neq B \implies A \cap B = \emptyset).$$

$$\textcircled{3} \quad \forall A \in \mathcal{P} \quad A \neq \emptyset.$$

Partición de un conjunto, repaso

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P} \subseteq 2^X$.

Se dice que \mathcal{P} es una **partición** de X , si se cumplen las siguientes condiciones.

$$\textcircled{1} \quad \bigcup_{A \in \mathcal{P}} A = X.$$

$$\textcircled{2} \quad \forall A, B \in \mathcal{P} \quad (A \neq B \implies A \cap B = \emptyset).$$

$$\textcircled{3} \quad \forall A \in \mathcal{P} \quad A \neq \emptyset.$$

Si no se pide la última condición, entonces decimos que \mathcal{P} es una **partición generalizada**.

Lista de conjuntos que forma una partición de un conjunto

Sea X un conjunto y sean $A_1, \dots, A_m \subseteq X$.

Decimos que (A_1, \dots, A_m) es una **partición** de X si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\textcircled{1} \quad \bigcup_{j=1}^m A_j = X.$$

$$\textcircled{2} \quad \forall j, k \in \{1, \dots, m\} \quad j \neq k \quad \implies \quad A_j \cap A_k = \emptyset.$$

$$\textcircled{3} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad A_j \neq \emptyset.$$

Sin pedir la última condición, la lista (A_1, \dots, A_m) es una **partición generalizada** de X .

La representación canónica de una función simple

Proposición

Sea $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ una función simple y sean $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{C}$ números diferentes a pares tales que

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}.$$

Definimos A_1, \dots, A_m de la siguiente manera:

$$A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Entonces (A_1, \dots, A_m) es una partición de X , y

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j}.$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad v_1, \dots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \quad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad v_1, \dots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \quad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

1 Demostremos que $X = \bigcup_{j=1}^m A_j$. Sea $x \in X$.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad v_1, \dots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \quad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

1 Demostremos que $X = \bigcup_{j=1}^m A_j$. Sea $x \in X$.

Entonces $f(x) \in f[X]$, y existe j en $\{1, \dots, m\}$ tal que $f(x) = v_j$. Luego $x \in A_j$.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad v_1, \dots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \quad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

- 1 Demostremos que $X = \bigcup_{j=1}^m A_j$. Sea $x \in X$.

Entonces $f(x) \in f[X]$, y existe j en $\{1, \dots, m\}$ tal que $f(x) = v_j$. Luego $x \in A_j$.

- 2 Sean $j, k \in \{1, \dots, m\}$ tales que $j \neq k$. Demostremos que $A_j \cap A_k = \emptyset$.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad v_1, \dots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \quad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

- 1 Demostremos que $X = \bigcup_{j=1}^m A_j$. Sea $x \in X$.

Entonces $f(x) \in f[X]$, y existe j en $\{1, \dots, m\}$ tal que $f(x) = v_j$. Luego $x \in A_j$.

- 2 Sean $j, k \in \{1, \dots, m\}$ tales que $j \neq k$. Demostremos que $A_j \cap A_k = \emptyset$.

Sea $x \in A_j \cap A_k$. Entonces $f(x) = v_j$ y $f(x) = v_k$.

Esto contradice a la suposición que v_1, \dots, v_m son disjuntos a pares.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad v_1, \dots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \quad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

- 1 Demostremos que $X = \bigcup_{j=1}^m A_j$. Sea $x \in X$.

Entonces $f(x) \in f[X]$, y existe j en $\{1, \dots, m\}$ tal que $f(x) = v_j$. Luego $x \in A_j$.

- 2 Sean $j, k \in \{1, \dots, m\}$ tales que $j \neq k$. Demostremos que $A_j \cap A_k = \emptyset$.

Sea $x \in A_j \cap A_k$. Entonces $f(x) = v_j$ y $f(x) = v_k$.

Esto contradice a la suposición que v_1, \dots, v_m son disjuntos a pares.

- 3 Sea $j \in \{1, \dots, m\}$. Mostremos que $A_j \neq \emptyset$.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad v_1, \dots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \quad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

- 1 Demostremos que $X = \bigcup_{j=1}^m A_j$. Sea $x \in X$.

Entonces $f(x) \in f[X]$, y existe j en $\{1, \dots, m\}$ tal que $f(x) = v_j$. Luego $x \in A_j$.

- 2 Sean $j, k \in \{1, \dots, m\}$ tales que $j \neq k$. Demostremos que $A_j \cap A_k = \emptyset$.

Sea $x \in A_j \cap A_k$. Entonces $f(x) = v_j$ y $f(x) = v_k$.

Esto contradice a la suposición que v_1, \dots, v_m son disjuntos a pares.

- 3 Sea $j \in \{1, \dots, m\}$. Mostremos que $A_j \neq \emptyset$.

Como $v_j \in f[X]$, encontramos x en X tal que $f(x) = v_j$. Luego $x \in A_j$.

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad v_1, \dots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \quad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad v_1, \dots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \quad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \dots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$. Entonces

$$\mathbb{1}_{A_j}(x) =$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad v_1, \dots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \quad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \dots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$. Entonces

$$\mathbb{1}_{A_j}(x) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k; \end{cases} \quad \text{esto es,} \quad \mathbb{1}_{A_j}(x) = \delta_{j,k}.$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad v_1, \dots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \quad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \dots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$. Entonces

$$\mathbb{1}_{A_j}(x) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k; \end{cases} \quad \text{esto es,} \quad \mathbb{1}_{A_j}(x) = \delta_{j,k}.$$

Luego

$$\sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j}(x)$$

Demostración

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad v_1, \dots, v_m \text{ son diferentes a pares}, \quad A_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Sea $x \in X$. Encontramos k en $\{1, \dots, m\}$ tal que $f(x) = v_k$. Entonces

$$\mathbb{1}_{A_j}(x) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k; \end{cases} \quad \text{esto es,} \quad \mathbb{1}_{A_j}(x) = \delta_{j,k}.$$

Luego

$$\sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^m v_j \delta_{j,k} = v_k = f(x).$$

Definición de una función simple por medio de una representación canónica

Proposición

Sean X un conjunto, sea (A_1, \dots, A_m) una partición de X y sean v_1, \dots, v_m algunos números diferentes a pares.

Definimos $f: X \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f := \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j}.$$

Entonces $f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$, $f \in \mathcal{S}(X, \mathbb{C})$, y

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} \quad A_j = f^{-1}[\{v_j\}].$$

Ejercicio: demostrar la proposición.

Resumen

f es simple $\iff f$ se puede escribir como

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j},$$

donde

Resumen

f es simple $\iff f$ se puede escribir como

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j},$$

donde (A_1, \dots, A_m) es una partición de X , v_1, \dots, v_m son números diferentes a pares.

Ejemplo

Consideramos la función $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\text{sgn}[\mathbb{R}] =$

Ejemplo

Consideramos la función $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces $\text{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$,

$$A_1 = \text{sgn}^{-1}[\{-1\}] =]-\infty, 0[, \quad A_2 = \text{sgn}^{-1}[\{0\}] = \{0\}, \quad A_3 = \text{sgn}^{-1}[\{1\}] =]0, +\infty[.$$

Luego

$$\text{sgn} = (-1)\mathbb{1}_{A_1} + 0\mathbb{1}_{A_2} + 1\mathbb{1}_{A_3} = -\mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_3}.$$

Ejemplo

Sea X un conjunto y sea (A_1, A_2, A_3, A_4) una partición del conjunto X .

Consideramos $f: X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f := -3\mathbb{1}_{A_1} + 4\mathbb{1}_{A_2} + 5\mathbb{1}_{A_3} + 8\mathbb{1}_{A_4}.$$

Entonces

$$f[X] =$$

Ejemplo

Sea X un conjunto y sea (A_1, A_2, A_3, A_4) una partición del conjunto X .

Consideramos $f: X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f := -3\mathbb{1}_{A_1} + 4\mathbb{1}_{A_2} + 5\mathbb{1}_{A_3} + 8\mathbb{1}_{A_4}.$$

Entonces

$$f[X] = \{-3, 4, 5, 8\}.$$

Sea $W = [2, 7]$. Entonces

$$f^{-1}[W] =$$

Ejemplo

Sea X un conjunto y sea (A_1, A_2, A_3, A_4) una partición del conjunto X .

Consideramos $f: X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f := -3\mathbb{1}_{A_1} + 4\mathbb{1}_{A_2} + 5\mathbb{1}_{A_3} + 8\mathbb{1}_{A_4}.$$

Entonces

$$f[X] = \{-3, 4, 5, 8\}.$$

Sea $W = [2, 7]$. Entonces

$$f^{-1}[W] = A_2 \cup A_3.$$

La preimagen de un conjunto respecto una función simple

Proposición

Sea $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ una función simple, tal que

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j},$$

donde (A_1, \dots, A_m) es una partición de X , v_1, \dots, v_m son números diferentes a pares.

Sea $W \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$f^{-1}[W] =$$

La preimagen de un conjunto respecto una función simple

Proposición

Sea $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ una función simple, tal que

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j},$$

donde (A_1, \dots, A_m) es una partición de X , v_1, \dots, v_m son números diferentes a pares.

Sea $W \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$f^{-1}[W] = \bigcup_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ v_j \in W}} A_j.$$

Criterio de medibilidad de una función simple

Proposición

Sea (X, \mathcal{F}) un espacio medible y sea $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ una función simple, tal que

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j},$$

donde (A_1, \dots, A_m) es una partición de X , v_1, \dots, v_m son números diferentes a pares.

Entonces

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \quad \iff$$

Criterio de medibilidad de una función simple

Proposición

Sea (X, \mathcal{F}) un espacio medible y sea $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ una función simple, tal que

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j},$$

donde (A_1, \dots, A_m) es una partición de X , v_1, \dots, v_m son números diferentes a pares.

Entonces

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \quad \Longleftrightarrow \quad A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}.$$

Demostración: ejercicio

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j}.$$

Por demostrar:

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \quad \iff$$

Demostración: ejercicio

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j}.$$

Por demostrar:

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \quad \iff \quad A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}.$$

Sugerencias.

Demostración: ejercicio

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j}.$$

Por demostrar:

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \quad \Longleftrightarrow \quad A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}.$$

Sugerencias.

\implies . Sea $k \in \{1, \dots, m\}$. Escribir A_k como la preimagen de un conjunto boreliano en \mathbb{C} .

Demostración: ejercicio

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j}.$$

Por demostrar:

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \quad \iff \quad A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}.$$

Sugerencias.

\implies . Sea $k \in \{1, \dots, m\}$. Escribir A_k como la preimagen de un conjunto boreliano en \mathbb{C} .

\impliedby . Dado $W \subseteq \mathbb{C}$, encontrar $f^{-1}[W]$.

Demostración: ejercicio

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j}.$$

Por demostrar:

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \quad \iff \quad A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}.$$

Sugerencias.

\implies . Sea $k \in \{1, \dots, m\}$. Escribir A_k como la preimagen de un conjunto boreliano en \mathbb{C} .

\impliedby . Dado $W \subseteq \mathbb{C}$, encontrar $f^{-1}[W]$.

\impliedby , otro camino. Mostrar que $\mathbb{1}_{A_1}, \dots, \mathbb{1}_{A_m} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Función simple dada por una representación generalizada, ejemplo

Sea X un conjunto y sea A_1, \dots, A_6 una partición generalizada de X .

$$C_1 \neq \emptyset, \quad C_2 = \emptyset, \quad C_3 \neq \emptyset, \quad C_4 \neq \emptyset, \quad C_5 = \emptyset, \quad C_6 \neq \emptyset.$$

$$w_1 = -5, \quad w_2 = 6, \quad w_3 = -5, \quad w_4 = 8, \quad w_5 = -5, \quad w_6 = 8.$$

Función simple dada por una representación generalizada, ejemplo

Sea X un conjunto y sea A_1, \dots, A_6 una partición generalizada de X .

$$C_1 \neq \emptyset, \quad C_2 = \emptyset, \quad C_3 \neq \emptyset, \quad C_4 \neq \emptyset, \quad C_5 = \emptyset, \quad C_6 \neq \emptyset.$$

$$w_1 = -5, \quad w_2 = 6, \quad w_3 = -5, \quad w_4 = 8, \quad w_5 = -5, \quad w_6 = 8.$$

Consideramos

$$f := -5\mathbb{1}_{C_1} + 6\mathbb{1}_{C_2} - 5\mathbb{1}_{C_3} + 8\mathbb{1}_{C_4} - 5\mathbb{1}_{C_5} + 8\mathbb{1}_{C_6}.$$

Función simple dada por una representación generalizada, ejemplo

Sea X un conjunto y sea A_1, \dots, A_6 una partición generalizada de X .

$$C_1 \neq \emptyset, \quad C_2 = \emptyset, \quad C_3 \neq \emptyset, \quad C_4 \neq \emptyset, \quad C_5 = \emptyset, \quad C_6 \neq \emptyset.$$

$$w_1 = -5, \quad w_2 = 6, \quad w_3 = -5, \quad w_4 = 8, \quad w_5 = -5, \quad w_6 = 8.$$

Consideramos

$$f := -5\mathbb{1}_{C_1} + 6\mathbb{1}_{C_2} - 5\mathbb{1}_{C_3} + 8\mathbb{1}_{C_4} - 5\mathbb{1}_{C_5} + 8\mathbb{1}_{C_6}.$$

En este ejemplo

$$f[X] =$$

Función simple dada por una representación generalizada, ejemplo

Sea X un conjunto y sea A_1, \dots, A_6 una partición generalizada de X .

$$C_1 \neq \emptyset, \quad C_2 = \emptyset, \quad C_3 \neq \emptyset, \quad C_4 \neq \emptyset, \quad C_5 = \emptyset, \quad C_6 \neq \emptyset.$$

$$w_1 = -5, \quad w_2 = 6, \quad w_3 = -5, \quad w_4 = 8, \quad w_5 = -5, \quad w_6 = 8.$$

Consideramos

$$f := -5\mathbb{1}_{C_1} + 6\mathbb{1}_{C_2} - 5\mathbb{1}_{C_3} + 8\mathbb{1}_{C_4} - 5\mathbb{1}_{C_5} + 8\mathbb{1}_{C_6}.$$

En este ejemplo

$$f[X] = \{-5, 8\}, \quad A_1 := f^{-1}[\{-5\}] =$$

Función simple dada por una representación generalizada, ejemplo

Sea X un conjunto y sea A_1, \dots, A_6 una partición generalizada de X .

$$C_1 \neq \emptyset, \quad C_2 = \emptyset, \quad C_3 \neq \emptyset, \quad C_4 \neq \emptyset, \quad C_5 = \emptyset, \quad C_6 \neq \emptyset.$$

$$w_1 = -5, \quad w_2 = 6, \quad w_3 = -5, \quad w_4 = 8, \quad w_5 = -5, \quad w_6 = 8.$$

Consideramos

$$f := -5\mathbb{1}_{C_1} + 6\mathbb{1}_{C_2} - 5\mathbb{1}_{C_3} + 8\mathbb{1}_{C_4} - 5\mathbb{1}_{C_5} + 8\mathbb{1}_{C_6}.$$

En este ejemplo

$$f[X] = \{-5, 8\}, \quad A_1 := f^{-1}[\{-5\}] = C_1 \cup C_3,$$

Función simple dada por una representación generalizada, ejemplo

Sea X un conjunto y sea A_1, \dots, A_6 una partición generalizada de X .

$$C_1 \neq \emptyset, \quad C_2 = \emptyset, \quad C_3 \neq \emptyset, \quad C_4 \neq \emptyset, \quad C_5 = \emptyset, \quad C_6 \neq \emptyset.$$

$$w_1 = -5, \quad w_2 = 6, \quad w_3 = -5, \quad w_4 = 8, \quad w_5 = -5, \quad w_6 = 8.$$

Consideramos

$$f := -5\mathbb{1}_{C_1} + 6\mathbb{1}_{C_2} - 5\mathbb{1}_{C_3} + 8\mathbb{1}_{C_4} - 5\mathbb{1}_{C_5} + 8\mathbb{1}_{C_6}.$$

En este ejemplo

$$f[X] = \{-5, 8\}, \quad A_1 := f^{-1}[\{-5\}] = C_1 \cup C_3, \quad A_2 := f^{-1}[\{8\}] =$$

Función simple dada por una representación generalizada, ejemplo

Sea X un conjunto y sea A_1, \dots, A_6 una partición generalizada de X .

$$C_1 \neq \emptyset, \quad C_2 = \emptyset, \quad C_3 \neq \emptyset, \quad C_4 \neq \emptyset, \quad C_5 = \emptyset, \quad C_6 \neq \emptyset.$$

$$w_1 = -5, \quad w_2 = 6, \quad w_3 = -5, \quad w_4 = 8, \quad w_5 = -5, \quad w_6 = 8.$$

Consideramos

$$f := -5\mathbb{1}_{C_1} + 6\mathbb{1}_{C_2} - 5\mathbb{1}_{C_3} + 8\mathbb{1}_{C_4} - 5\mathbb{1}_{C_5} + 8\mathbb{1}_{C_6}.$$

En este ejemplo

$$f[X] = \{-5, 8\}, \quad A_1 := f^{-1}[\{-5\}] = C_1 \cup C_3, \quad A_2 := f^{-1}[\{8\}] = C_4 \cup C_6.$$

Función simple dada por una representación generalizada, ejemplo

Sea X un conjunto y sea A_1, \dots, A_6 una partición generalizada de X .

$$C_1 \neq \emptyset, \quad C_2 = \emptyset, \quad C_3 \neq \emptyset, \quad C_4 \neq \emptyset, \quad C_5 = \emptyset, \quad C_6 \neq \emptyset.$$

$$w_1 = -5, \quad w_2 = 6, \quad w_3 = -5, \quad w_4 = 8, \quad w_5 = -5, \quad w_6 = 8.$$

Consideramos

$$f := -5\mathbb{1}_{C_1} + 6\mathbb{1}_{C_2} - 5\mathbb{1}_{C_3} + 8\mathbb{1}_{C_4} - 5\mathbb{1}_{C_5} + 8\mathbb{1}_{C_6}.$$

En este ejemplo

$$f[X] = \{-5, 8\}, \quad A_1 := f^{-1}[\{-5\}] = C_1 \cup C_3, \quad A_2 := f^{-1}[\{8\}] = C_4 \cup C_6.$$

Representación canónica de f : $f = -5\mathbb{1}_{B_1 \cup B_3} + 8\mathbb{1}_{B_4 \cup B_6}$.

Función simple dada por una representación no canónica

Proposición

Sea X un conjunto, sea (C_1, \dots, C_p) una partición generalizada de X , y sean $w_1, \dots, w_p \in \mathbb{C}$.

Definimos $f: X \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f := \sum_{k=1}^p w_k \mathbb{1}_{C_k}.$$

Entonces f es simple y $f[X] = \{y \in \mathbb{C}: \exists k \in \{1, \dots, p\} \ y = w_k, C_k \neq \emptyset\}$.

Si v_1, \dots, v_m son todos los elementos diferentes de $f[X]$, entonces

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j}, \quad \text{donde} \quad A_j = f^{-1}[\{v_j\}] =$$

Función simple dada por una representación no canónica

Proposición

Sea X un conjunto, sea (C_1, \dots, C_p) una partición generalizada de X , y sean $w_1, \dots, w_p \in \mathbb{C}$.

Definimos $f: X \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f := \sum_{k=1}^p w_k \mathbb{1}_{C_k}.$$

Entonces f es simple y $f[X] = \{y \in \mathbb{C}: \exists k \in \{1, \dots, p\} \ y = w_k, \ C_k \neq \emptyset\}$.

Si v_1, \dots, v_m son todos los elementos diferentes de $f[X]$, entonces

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{A_j}, \quad \text{donde} \quad A_j = f^{-1}[\{v_j\}] = \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq p \\ w_k = v_j}} C_k.$$

Idea de demostración

$$f = \sum_{k=1}^p w_k \mathbb{1}_{C_k}.$$

Paso 1. Si $q \in \{1, \dots, p\}$, $x \in C_q$, entonces $f(x) =$

Idea de demostración

$$f = \sum_{k=1}^p w_k \mathbb{1}_{C_k}.$$

Paso 1. Si $q \in \{1, \dots, p\}$, $x \in C_q$, entonces $f(x) = w_q$.

Paso 2. $f[X] = \{y \in \mathbb{C} : \exists k \in \{1, \dots, p\} \ y = w_k, C_k \neq \emptyset\} \subseteq \{w_1, \dots, w_p\}$.

Paso 3. Numeramos todos los elementos diferentes de $f[X]$:

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}.$$

Idea de demostración

$$f = \sum_{k=1}^p w_k \mathbb{1}_{C_k}.$$

Paso 1. Si $q \in \{1, \dots, p\}$, $x \in C_q$, entonces $f(x) = w_q$.

Paso 2. $f[X] = \{y \in \mathbb{C} : \exists k \in \{1, \dots, p\} \ y = w_k, \ C_k \neq \emptyset\} \subseteq \{w_1, \dots, w_p\}$.

Paso 3. Numeramos todos los elementos diferentes de $f[X]$:

$$f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}.$$

Paso 4. Demostrar que

$$f^{-1}[\{v_j\}] = \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq p \\ w_k = v_j}} C_k.$$