Funciones simples

Objetivos. Definir la noción de función simple, establecer relaciones entre funciones simples y funciones medibles.

Requisitos. Imágenes y preimágenes, función característica de un conjunto, funciones medibles.

1. Notación (imagen de una función). Sea $f\colon X \to Y$ una función. Denotamos por $\mathcal{R}(f)$ o por $\operatorname{im}(f)$ su *imagen* llamada también el *rango* y el *conjunto de valores*:

$$\mathcal{R}(f) = \operatorname{im}(f) = f[X] = \big\{y \in Y\colon \quad \exists x \in X \quad f(x) = y\big\}.$$

2. Definición (función simple). Una función $f\colon X \to \mathbb{C}$ se llama *simple* si su imagen $\mathcal{R}(f)$ es un conjunto finito.

3. Observación. De manera similar se definen *funciones reales simples* y *funciones no negativas simples*. Notemos que en todos estos casos funciones simples no pueden tomar valor $+\infty$ ni $-\infty$.

4. Definición (partición de un conjunto). Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P} \subset 2^X$. Se dice que $\mathcal{P}$ es una *partición* de X si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\displaystyle\bigcup_{A\in\mathcal{P}} A = X.$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P} \qquad A \neq B \qquad \Longrightarrow \qquad A \cap B = \varnothing.$
3. $\forall A \in \mathcal{P} \qquad A \neq \varnothing.$

Si no se pide la última condición, entonces decimos que $\mathcal{P}$ es una *partición generalizada*.

5. Definición (lista de conjuntos que forma una partición de un conjunto). Sea X un conjunto y sea $(Y_1, \ldots, Y_m)$ una lista de subconjuntos de X. Decimos que la lista $(Y_1, \ldots, Y_m)$ forma una *partición* de X si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} Y_j = X.$
2. $\forall j, k \in \{1, \ldots, m\} \quad j \neq k \qquad \Longrightarrow \qquad Y_j \cap Y_k = \varnothing.$
3. $\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad Y_j \neq \varnothing.$

Si no se pide la última condición, entonces decimos que la lista $(Y_1, \ldots, Y_m)$ forma una *partición generalizada* de X.

6. Proposición (representación canónica de una función simple). Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ una función simple. Sean $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$ números diferentes tales que

$$\{v_1, \ldots, v_m\} = \mathcal{R}(f).$$

Definimos $Y_1, \ldots, Y_m$ de la siguiente manera:

$$Y_j = f^{-1}[\{v_j\}]. \tag{1}$$

Entonces la lista $(Y_1, \ldots, Y_m)$ forma una partición de X, y además se cumple la siguiente fórmula:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \chi_{Y_j}. \tag{2}$$

7. Proposición (definición de una función simple por medio de una representación canónica). Sea X un conjunto, sea $(Y_1, \ldots, Y_m)$ una partición de X y sean $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$ algunos números diferentes a pares. Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ la función definida mediante la regla

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \chi_{Y_j}. \tag{3}$$

Entonces $\mathcal{R}(f) = \{v_1, \ldots, v_m\}$ y

$$Y_j = f^{-1}[\{v_j\}]. \tag{4}$$

8. Resumen. Cada función de la forma (2) es simple, y cada función simple se escribe de manera única en forma (2).

9. Proposición (preimagen de un conjunto respecto a una función simple). Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ una función simple, sean $v_1, \ldots, v_m$ todos los valores diferentes de f y sea $A_k = f^{-1}[v_k]$ para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces para todo $B \subset Y$,

$$f^{-1}[B] = \bigcup_{\substack{k\in\{1,\ldots,m\}:\\ v_k\in B}} A_k.$$

10. Proposición (criterio de la medibilidad de una función simple). Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible, sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ una función simple de la forma (2). Entonces f es medible si y sólo si todos los conjuntos $Y_1, \ldots, Y_m$ son medibles.

11. Proposición (definición de una función simple por medio de una representación no canónica). Sea X un conjunto, sean $Z_1, \ldots, Z_p$ subconjuntos de X tales que

$$\bigcup_{k=1}^{p} Z_k = X$$

y

$$\forall k, s \in \{1, \ldots, p\} \qquad \Big(k \neq s \qquad \Longrightarrow \qquad Z_k \cap Z_s = \varnothing \Big),$$

y sean $w_1, \ldots, w_p \in \mathbb{C}$. Notemos que algunos de los números $w_1, \ldots, w_p$ pueden coincidir, y algunos de los conjuntos $Z_1, \ldots, Z_p$ pueden ser vacíos. Encontramos $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$ diferentes a pares tales que

$$\{v_1, \ldots, v_m\} = \{w_k\colon\ k \in \{1, \ldots, p\},\ Z_k \neq \varnothing\}.$$

Para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$ pongamos

$$Y_j \coloneqq \bigcup_{\substack{1 \le k \le p \\ w_k = v_j}} Z_k.$$

Entonces la función

$$f \coloneqq \sum_{k=1}^{p} w_k \chi_{Z_k}$$

es simple y tiene una representación canónica

$$\sum_{j=1}^{m} v_k \chi_{Y_j}.$$

Operaciones aritméticas con funciones simples

12. Producto por escalar de una función simple. Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ una función simple y sea $c \in \mathbb{C}$. Entonces la función cf también es simple.

13. Suma de funciones simples. Sean $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ funciones simples. Entonces $f + g$ también es una función simple.

14. Producto de funciones simples. Sean $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ funciones simples. Entonces fg también es una función simple.