# Sigma-álgebras

**Objetivos.** Definir la noción de $\sigma$-álgebra y estudiar sus propiedades básicas.

**Requisitos.** Operaciones con conjuntos, operaciones con familias de conjuntos.

**1. Notación (conjunto potencia, conjunto de los subconjuntos).** Sea $X$ un conjunto. Entonces denotemos por $2^X$ al conjunto de todos los subconjuntos de $X$.

**2. Definición ($\boldsymbol{\sigma}$-álgebra).** Sea $X$ un conjunto. Un conjunto $\mathcal{F} \subset 2^X$ se llama *$\sigma$-álgebra* sobre $X$ si cumple con las siguientes condiciones:

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ es cerrado bajo complementos: si $A \in \mathcal{F}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{F}$.
3. $\mathcal{F}$ es cerrado bajo uniones numerables: si $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

**3. Propiedades elementales de $\boldsymbol{\sigma}$-álgebras.** Sea $\mathcal{F}$ una $\sigma$-álgebra sobre $X$. Entonces:

1. $X \in \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones numerables:
   si $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.
3. $\mathcal{F}$ es cerrada bajo uniones finitas:
   si $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces $\bigcup_{i=1}^m A_i \in \mathcal{F}$.
4. $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones finitas:
   si $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces $\bigcap_{i=1}^m A_i \in \mathcal{F}$.
5. $\mathcal{F}$ es cerrada bajo la operación de diferencia de conjuntos:
   si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{F}$.

## Ejemplos de $\sigma$-álgebras

**4. Ejemplo de una $\sigma$-álgebra: conjunto potencia.** Sea $X$ un conjunto. Entonces $2^X$ es una $\sigma$-álgebra sobre $X$.

**5. Propiedades de conjuntos finitos o numerables (repaso).** Recuerde cómo se demuestran las siguientes proposiciones:

- Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos a lo más numerables. Entonces la unión $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ también es un conjunto a lo más numerable.
- Sea $B$ un conjunto a lo más numerable y sea $C \subset B$. Entonces que $C$ también es a lo más numerable.

**6. Ejemplo de una $\sigma$-álgebra: subconjuntos a lo más numerables y sus complementos.** Sea $X$ un conjunto no numerable. Denotemos por $\mathcal{N}$ al conjunto de todos los subconjuntos finitos o numerables de $X$:

$$\mathcal{N} := \big\{Y \subset X\colon\ Y \text{ es finito o numerable}\big\}.$$

Denotemos por $\mathcal{F}$ al conjunto que consiste en todos los subconjuntos finitos o numerables de $X$ y todos los subconjuntos de $X$ cuyos complementos son finitos o numerables:

$$\mathcal{F} := \big\{Y \subset X\colon\ Y \in \mathcal{N}\ \vee\ Y^c \in \mathcal{N}\big\}.$$

Entonces $\mathcal{F}$ es una $\sigma$-álgebra.

*Indicación acerca de la demostración.* En la demostración de la propiedad 3 hay que considerar dos casos: 1) $A_i \in \mathcal{N}$ para todo $i \in \mathbb{N}$; 2) $A_j^c \in \mathcal{N}$ para algún $j \in \mathbb{N}$. $\square$