# Caminos mínimos en grafos
# (proyecto o tarea adicional)

En este proyecto (que se puede llamar también "tarea adicional") se propone demostrar todas las proposiciones y resolver todos los problemas.

**1 Definición** (grafo ponderado)**.** Un *grafo ponderado* es un par $(V, p)$, donde $V$ es un conjunto finito y $p$ es una función $V \times V \to [0, +\infty]$ tal que $p(v, v) = 0$ para cada $v$ en $V$ y $p(v, w) = p(w, v)$ para cualesquiera $v, w$ en $V$. Los elementos de $V$ se llaman *vértices* y el número $p(v, w)$ se llama el peso de la arista $(v, w)$.

**2 Definición** (camino en un grafo)**.** Sea $(V, p)$ un grafo ponderado. Un *camino* en $V$ es una lista de vértices de $V$. Se dice que $(v_1, \ldots, v_m)$ une los vértices $v_1$ y $v_m$.

**3 Definición** (el conjunto de los caminos que unen dos vértices dados)**.** Sea $(V, p)$ un grafo ponderado y sean $a, b \in V$. Denotamos por $\mathcal{P}(a, b)$ al conjunto de los caminos que unen los vértices $a$ y $b$:

$$\mathcal{P}(a, b) \coloneqq \Big\{(v_1, \ldots, v_m) \colon \quad m \in \mathbb{N}, \quad v_1, \ldots, v_m \in V, \quad v_1 = a, \quad v_m = b\Big\}.$$

**4 Definición** (la longitud del camino)**.** Sea $(V, p)$ un grafo ponderado y sea $v_1, \ldots, v_m$ un camino en $V$. Entonces

$$\ell(v_1, \ldots, v_m) \coloneqq \sum_{j=1}^{m} p(v_j, v_{j+1}).$$

**5 Proposición** (sobre caminos con repeticiones y ciclos)**.** *Sea $(V, p)$ un grafo ponderado. Dado un camino en $V$, existe un camino en $V$ que une los mismos puntos, no tiene repeticiones y tiene longitud menor o igual que la longitud del camino original.*

*Idea de demostración.* Sea $v_1, \ldots, v_m$ un camino en $V$. Si $r, s \in \{1, \ldots, m\}$, $1 \le r < s \le m$ y $v_r = v_s$, entonces

$$\ell(v_1, \ldots, v_r, v_{s+1}, \ldots, v_m) \le \ell(v_1, \ldots, v_m).$$

Problema: escribir una demostración completa y formal. □

**6 Definición** (distancia entre dos vértices)**.** Sea $(V, p)$ un grafo ponderado y sean $a, b$ elementos de $V$. Denotemos por $d(a, b)$ al mínimo entre las longitudes de todos los caminos que unen $a$ y $b$:

$$d(a, b) := \min_{(v_1,\ldots,v_m)\in\mathcal{P}(a,b)} \ell(v_1, \ldots, v_m).$$

**7 Proposición.** *$(V, d)$ es un espacio métrico.*

**8 Problema.** Demostrar la proposición anterior.

## Algoritmo de Floyd y Warshall

**9 Definición.** Sea $(V, p)$ un grafo ponderado y sean $a, b$ elementos de $V$. Dado $r$ en $\mathbb{N}$, denotemos por $d_r(a, b)$ al mínimo entre las longitudes de todos los caminos con $\leq r$ aristas que unen $a$ y $b$:

$$d(a, b) := \min_{\substack{(v_1,\ldots,v_m)\in\mathcal{P}(a,b)\\ m-1\leq r}} \ell(v_1, \ldots, v_m).$$

**10 Proposición.** *Sea $(V, p)$ un grafo ponderado y sean $a, b \in V$. Denotemos por $n$ al número de los elementos de $V$. Entonces $d(a, b) = d_n(a, b)$.*

**11 Proposición.** *Sean $(V, p)$ un grafo ponderado, $a, b \in V$ y $r \in \mathbb{N}_0$. Entonces*

$$d_{r+1}(a, b) = \min_{c\in V}\big(d_r(a, c) + p(c, b)\big).$$

**12 Problema.** Demostrar las dos proposiciones anteriores.

**13 Problema.** En algún lenguaje de programación escribir un programa que calcula $d(a, b)$ para cada par $a, b$ en $V$ usando las ideas anteriores. Se recomienda identificar $V$ con $\{0, \ldots, n-1\}$ o con $\{1, \ldots, n\}$ (dependiendo del lenguaje de programación utilizado) y guardar el graf ponderado como una matriz de tamaño $n \times n$ cuya componente $(j, k)$ es $p(j, k)$. El número $n$ y los pesos $p(j, k)$ pueden estar dados en un archivo de texto.