Conjuntos de no cercanía y sus propiedades

Objetivos. Sea X un conjunto, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{C}$ y sea $g\colon X \to \mathbb{C}$. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada n, k en $\mathbb{N}$, definamos los siguientes conjuntos:

$$A(\varepsilon, n) \coloneqq \Big\{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\Big\}, \qquad B(\varepsilon, k) \coloneqq \bigcup_{n\geq k} A(\varepsilon, n),$$

$$C(\varepsilon) \coloneqq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon, k), \qquad D \coloneqq \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon).$$

Vamos a estudiar algunas propiedades de estos conjuntos.

Requisitos. La unión de una familia de conjuntos, la intersección de una familia de conjuntos, la parte entera de un número real, propiedades de medida, funciones medibles.

Para tener más motivación, antes de este tema se recomienda mostrar que la convergencia puntual se describe en términos del conjunto D y la convergencia uniforme se escribe en términos de los conjuntos $B(\varepsilon, k)$.

Monotonía de los conjuntos de no cercanía

1 Proposición. *Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, la sucesión $\big(B(\varepsilon, k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente, esto es,*

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, k + 1) \subseteq B(\varepsilon, k).$$

Demostración.

$$B(\varepsilon, k+1) = \bigcup_{n\geq k+1} A(\varepsilon, n) \subseteq A(\varepsilon, k) \cup \left(\bigcup_{n\geq k+1} A(\varepsilon, n)\right) = \bigcup_{n\geq k+1} A(\varepsilon, n) \subseteq \bigcup_{n\geq k} A(\varepsilon, n). \quad \square$$

2 Proposición. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces, la familia $\big(A(\varepsilon, n)\big)_{\varepsilon>0}$ es decreciente:*

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \qquad (\varepsilon_1 < \varepsilon_2) \qquad \Longrightarrow \qquad \big(A(\varepsilon_2, n) \subseteq A(\varepsilon_1, n)\big).$$

Demostración. Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tales que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, y sea $x \in A(\varepsilon_2, n)$. Entonces,

$$|f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon_2 > \varepsilon_1,$$

así que $x \in A(\varepsilon_1, n)$. $\square$

3 Proposición. *Sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces, la familia $\big(B(\varepsilon, k)\big)_{\varepsilon>0}$ es decreciente:*

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \qquad (\varepsilon_1 < \varepsilon_2) \qquad \Longrightarrow \qquad \big(B(\varepsilon_2, k) \subseteq B(\varepsilon_1, k)\big).$$

Demostración. Para cada $n \geq k$, tenemos que

$$A(\varepsilon_2, n) \subseteq A(\varepsilon_1, n) \subseteq B(\varepsilon_1, k).$$

La unión de estos conjuntos $A(\varepsilon_2, n)$ también está contenida en $B(\varepsilon_1, k)$. $\square$

4 Proposición. *La familia* $\big(C(\varepsilon)\big)_{\varepsilon>0}$ *es decreciente:*

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \qquad (\varepsilon_1 < \varepsilon_2) \qquad \Longrightarrow \qquad \big(C(\varepsilon_2) \subseteq C(\varepsilon_1)\big).$$

Demostración. Para cada k en $\mathbb{N}$, tenemos que $C(\varepsilon_2) \subseteq B(\varepsilon_2, k) \subseteq B(\varepsilon_1, k)$, por lo tanto $C(\varepsilon_2)$ está contenido en la intersección de estos $B(\varepsilon_1, k)$. $\square$

5 Proposición. *La unión de la familia no numerable* $(C(\varepsilon))_{\varepsilon \in (0,+\infty)}$ *se puede representar como la unión de una subfamilia* numerable*:*

$$\bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon) = \bigcup_{p=1}^{\infty} C(1/p).$$

Demostración. La contención $\supseteq$ es obvia. Por otro lado, si $\varepsilon > 0$, entonces ponemos $p = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$, luego $p > 1/\varepsilon$, $\varepsilon < 1/p$ y $C(\varepsilon) \subseteq C(1/p)$. $\square$

Medibilidad de los conjuntos de no cercanía

6 Proposición. *Sean* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)^{\mathbb{N}}$ *y* $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. *Entonces, para cualesquiera* $\varepsilon > 0$ *y* n, k *en* $\mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, n) \in \mathcal{F}, \quad B(\varepsilon, k) \in \mathcal{F}, \quad C(\varepsilon) \in \mathcal{F}, \quad D \in \mathcal{F}.$$

Demostración. 1. Para cada n en $\mathbb{N}$, pongamos

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)|.$$

Notemos que $f_n - g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y $h_n = \operatorname{abs} \circ (f_n - g) \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.

2. Dados $\varepsilon > 0$ y n en $\mathbb{N}$, expresamos $A(\varepsilon, n)$ como la preimagen del rayo derecho $[\varepsilon, +\infty[$ respecto a la función h_n:

$$A(\varepsilon, n) = \Big\{x \in X\colon\ h_n(x) \geq \varepsilon\Big\} = h_n^{-1}\Big[\,[\varepsilon, +\infty[\,\Big].$$

Como $[\varepsilon, +\infty[\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y h_n es $\mathcal{F}$-medibles, concluimos que $A(\varepsilon, n) \in \mathcal{F}$.

3. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada k en $\mathbb{N}$, tenemos que $B(\varepsilon, k) \in \mathcal{F}$ porque $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra y $B(\varepsilon, k)$ es una unión numerable de los conjuntos $A(\varepsilon, n)$ con $n \geq k$.

4. Para cada $\varepsilon > 0$, tenemos que $C(\varepsilon) \in \mathcal{F}$ porque $C(\varepsilon)$ es una intersección numerable de elementos de $\mathcal{F}$.

5. Para demostrar que $D \in \mathcal{F}$, representamos D en forma

$$D = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} C(1/p).$$

Aquí es importante que la unión es numerable. $\square$