Formas sesquilineales

Objetivos. Estudiar (repasar) las propiedades básicas de formas sesquilineales.

Prerrequisitos. Funciones lineales y bilineales en espacios vectoriales.

En este tema suponemos que H es un espacio vectorial complejo.

1 Definición (forma sesqulineal)**.** Una función $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ se llama *forma sesquilineal* (o *función sesquilineal*), si es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo argumento, esto es, para cada a, b, c en H y cada λ, μ en $\mathbb{C}$,

$$f(\lambda a + \mu b, c) = \lambda f(a, c) + \mu f(b, c),$$
$$f(a, \lambda b + \mu c) = \overline{\lambda} f(a, b) + \overline{\mu} f(a, c).$$

2 Observación. Podemos separar la definición de forma sesquilineal en 4 propiedades.

- f es aditiva respecto al primer argumento:

$$f(a + b, c) = f(a, c) + f(b, c).$$

- f es homogénea respecto al primer argumento:

$$f(\lambda a, b) = \lambda f(a, b).$$

- f es aditiva respecto al segundo argumento:

$$f(a, b + c) = f(a, b) + f(a, c).$$

- f es homogénea conjugada ("conjugadamente homogénea) respecto al segundo argumento:

$$f(a, \lambda b) = \overline{\lambda}\, f(a, b).$$

En este tema suponemos que $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal.

3 Proposición. *Para cada* m *en* $\mathbb{N}$*, cualesquiera* $a_1, \ldots, a_m$ *en* H*, cualesquiera* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *en* $\mathbb{C}$ *y cualquier* b *en* H*,*

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, b\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(a_j, b).$$

Demostración. Inducción matemática sobre m. $\square$

4 Proposición. *Para cada* n *en* $\mathbb{N}$*, cualquier* a *en* H*, cualesquiera* $b_1, \ldots, b_n$ *en* $\mathbb{N}$ *y cualesquiera* $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *en* H*,*

$$f\left(a, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mu_k} f(a, b_k).$$

5 Proposición. *Para cada* m, n *en* $\mathbb{N}$*, cualesquiera* $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ *en* H *y cualesquiera* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n$ *en* $\mathbb{C}$*,*

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \overline{\mu_k} f(a_j, b_k).$$

6 Proposición. *Sea* $A \subseteq H$*. Entonces el siguiente conjunto es un subespacio de* H*:*

$$\{b \in H\colon \quad \forall a \in A \quad f(a, b) = 0\}.$$

7 Proposición. *Sean* $m \in \mathbb{N}$*,* $a_1, \ldots, a_m \in H$*,* $S = \ell(a_1, \ldots, a_m)$*. Entonces*

$$\{b \in H\colon \quad \forall s \in S \quad f(s, b) = 0\} = \{b \in H\colon \quad \forall k \in \{1, \ldots, m\} \quad f(a_k, b) = 0\}.$$

Formas cuadráticas asociadas a formas sesquilineales

8 Definición. Dada una forma sesquilineal $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$, la *forma cuadrática* asociada a f se define como $q\colon H \to \mathbb{C}$,

$$q(x) \coloneqq f(x, x) \qquad (x \in H).$$

En las siguientes proposiciones suponemos que $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal y $q\colon H \to \mathbb{C}$ es la forma cuadrática asociada a f.

9 Proposición (la identidad de paralelogramo para formas sesquilineales)**.** *Para cualesquiera a, b en H,*

$$q(a+b) + q(a-b) = 2(q(a) + q(b)). \tag{1}$$

Demostración. Escribimos $q(a+b)$ en términos de f, aplicamos la propiedad aditiva respecto al primer argumento y luego la propiedad aditiva respecto al segundo argumento:

$$\begin{aligned} q(a+b) &= f(a+b, a+b) = f(a, a+b) + f(b, a+b) \\ &= f(a,a) + f(a,b) + f(b,a) + f(b,b) \\ &= q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b). \end{aligned}$$

Sustituimos $-b$ en vez de b:

$$q(a-b) = q(a) - f(a,b) - f(b,a) + q(b).$$

Al sumar estas dos igualdades obtenemos (2). $\square$

10 Proposición (la identidad de Pitágoras para formas sesquilineales)**.** *Sean $a, b \in H$ tales que $f(a,b) = 0$ y $f(b,a) = 0$. Entonces*

$$q(a+b) = q(a) + q(b).$$

Demostración. Se sigue de la identidad que ya vimos:

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b). \qquad \square$$

11 Lema. *Sea $p \in \{0,1,2,3\}$. Entonces*

$$\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^{pk} = \begin{cases} 4, & p = 0; \\ 0, & p \in \{1,2,3\}. \end{cases}$$

12 Proposición (la identidad de polarización para formas sesquilineales)**.** *Sean $a, b \in H$. Entonces*

$$f(a,b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, q(a + \mathrm{i}^k \, b). \tag{2}$$

Demostración. Para cada k en $\{0,1,2,3\}$ tenemos

$$q(a + \mathrm{i}^k \, b) = f(a + \mathrm{i}^k \, b, a + \mathrm{i}^k \, b) = q(a) - \mathrm{i}^k \, f(a,b) + \mathrm{i}^k \, f(b,a) + q(b).$$

Multiplicamos por i^k:

$$\mathrm{i}^k \, q(a + \mathrm{i}^k \, b) = \mathrm{i}^k \, q(a) + f(a,b) + \mathrm{i}^{2k} \, f(b,a) + \mathrm{i}^k \, q(b).$$

Sumamos ambos lados de esta igualded sobre k en $\{0,1,2,3\}$. Aplicando el Lema 11 obtenemos (2). $\square$

Vamos a conocer una generalización de la identidad de polarización que involucra m sumandos ($m \geq 3$) y una raíz primitiva de la unidad de orden m. Dado m en $\mathbb{N}$, usemos la siguiente notación:

$$\varepsilon_m := \exp\left(\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{m}\right).$$

13 Ejercicio (potencias de una raíz primitiva de la unidad)**.** Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, y sea $r \in \mathbb{Z}$. Demostrar que

$$\varepsilon_m^r = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r \in m\mathbb{Z}.$$

La condición $r \in m\mathbb{Z}$ significa que m divide a r.

14 Ejercicio. Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, y sea $p \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_m^{pk} = \begin{cases} m, & p = 0; \\ 0, & p \in \{1, \ldots, m-1\}. \end{cases}$$

15 Ejercicio (la identidad de polarización con m sumandos)**.** Sea $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Denotemos por q la forma cuadrática asociada a f:

$$q(x) := f(x, x).$$

Sean $a, b \in H$. Demostrar que

$$f(a, b) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_m^k \, q(a + \varepsilon_m^k b).$$