Propiedades elementales de las formas sesquilineales (un tema de la unidad “Espacios con producto interno”)

Egor Maximenko, Enrique Abdeel Muñoz de la Colina, Elisa Suárez Barraza

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

13 de julio de 2022

Contenido

Prerrequisitos

- Espacios vectoriales complejos.
- Funciones lineales y bilineales en espacios vectoriales.
- El producto interno canónico en $\mathbb{C}^n$.

Plan

Definición de forma sesquilineal

En este tema asumiremos que V es un espacio vectorial complejo.

Definición

Una función $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ se llama forma sesquilineal o función sesquilineal, si es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo, es decir, para cada a, b, c en V y cada λ, μ en $\mathbb{C}$,

$$f(\lambda a + \mu b, c) = \lambda f(a, c) + \mu f(b, c)$$

$$f(a, \lambda b + \mu c) = \overline{\lambda} f(a, b) + \overline{\mu} f(a, c).$$

Plan

Propiedad lineal respecto al primer argumento, con n sumandos

En adelante, entenderemos que $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal.

Propiedad lineal respecto al primer argumento, con n sumandos

En adelante, entenderemos que $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal.

Proposición

Para cada $m \in \mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_m \in V$, cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y cualquier $b \in V$,

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, b\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(a_j, b).$$

Demostración

Procedemos por inducción sobre m.

Para cada m en $\mathbb{N}$, denotamos por $\mathscr{A}(m)$ la siguiente afirmación:

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, b\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(a_j, b).$$

Demostración

Procedemos por inducción sobre m.

Para cada m en $\mathbb{N}$, denotamos por $\mathscr{A}(m)$ la siguiente afirmación:

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, b\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(a_j, b).$$

La afirmación $\mathscr{A}(1)$ es obvia, pues ambos lados se reducen a

$$\lambda_1 f(a_1, b).$$

Propiedades de las formas sesquilineales

$\mathscr{A}(2)$:

$$f\left(\sum_{j=1}^{2}\lambda_j a_j, b\right) = f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b) = \lambda_1 f(a_1, b) + \lambda_2 f(a_2, b) = \sum_{j=1}^{2}\lambda_j f(a_j, b).$$

$\mathscr{A}(m+1)$: Suponemos cierto $\mathscr{A}(m)$

$$f\left(\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j a_j, b\right) = f\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a_j + \lambda_{m+1}a_{m+1}, b\right) = f\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a_j, b\right) + \lambda_{m+1} f(a_{m+1}, b).$$

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición

Para cada $m \in \mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_m \in H$, cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y cualquier $b \in H$,

$$f\left(b, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \overline{\lambda_j} f(b, a_j).$$

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición

Para cada $m \in \mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_m \in H$, cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ y cualquier $b \in H$,

$$f\left(b, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \overline{\lambda_j} f(b, a_j).$$

Demostración: Se tiene por inducción sobre la definición de forma sesquilineal.

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición

Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n \in H$, cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m \in \mathbb{C}$, entonces:

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \overline{\mu_k} f(a_j, b_k).$$

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición

Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n \in H$, cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m \in \mathbb{C}$, entonces:

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j, \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \overline{\mu_k} f(a_j, b_k).$$

Demostración: Se tiene de las dos proposiciones anteriores.

La forma general de las formas sesquilineales en $\mathbb{C}^n$

Ejercicio

Sea $f\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Demostrar que existe una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n \qquad f(x, y) = y^* A x.$$

La forma general de las formas sesquilineales en $\mathbb{C}^n$

Ejercicio

Sea $f\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Demostrar que existe una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n \qquad f(x, y) = y^* A x.$$

Sugerencia. Expandir x, y en la base canónica de $\mathbb{C}^n$:

$$f(x, y) = f\left(\sum_{k=1}^{n} ???\, e_k, \sum_{j=1}^{n} ???\, e_j\right) = \sum_{j,k=1}^{n} ???.$$

Plan

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición

Sea $A \subset H$. Definimos el conjunto $S_A := \{b \in H \colon \forall a \in A, f(a,b) = 0\}$.

Entonces S_A es subespacio de H.

Demostración:

Sean $x_1, x_2 \in S_A$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$f(b, x_1 + \lambda x_2) = f(b, x_1) + \overline{\lambda} f(b, x_2) = 0.$$

Luego, $x_1 + \lambda x_2 \in S_A$, por lo que S_A será un subespacio de H.

Proposición

Sean $A, B \subset H$. Como en la proposición anterior, definimos los conjuntos S_A y S_B. Si $A \subset B$ entonces $S_B \subset S_A$.

Proposición

Sean $A, B \subset H$. Como en la proposición anterior, definimos los conjuntos S_A y S_B. Si $A \subset B$ entonces $S_B \subset S_A$.

Demostración: Sea $x \in S_B$, entonces $\forall b \in B$, se tiene $f(b, x) = 0$. Como $A \subset B$, se cumple $\forall b \in A,\ f(b, x) = 0$. Luego, $S_B \subset S_A$.

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_m \in H$, $A = \ell(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Definimos S_A y S_B como en la proposición anterior. Entonces $S_A = S_B$.

Propiedades de las formas sesquilineales

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_m \in H$, $A = \ell(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Definimos S_A y S_B como en la proposición anterior. Entonces $S_A = S_B$.

Demostración: La contención $S_A \subset S_B$ es inmediata, por la proposición anterior.

Sea $x \in S_B$, entonces $\forall k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $f(a_k, x) = 0$.
Sea $v \in A$, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, tales que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k = v$. Luego

$$f(v, x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k, x\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k, x) = 0.$$

Como $v \in A$ fue arbitratio, tenemos $\forall v \in A, \quad f(a, x) = 0$. Luego $S_B \subset S_A$.