

# Formas sesquilineales: definición y ejemplos

(un tema de la unidad “Espacios con producto interno”)

Egor Maximenko, Enrique Abdeel Muñoz de la Colina, Elisa Suárez Barraza

Instituto Politécnico Nacional  
Escuela Superior de Física y Matemáticas  
México

13 de julio de 2022

# Contenido

- 1 Definición de la forma sesquilineal
- 2 Ejemplos en el espacio de vectores
- 3 Ejemplos en el espacio de funciones continuas
- 4 Ejemplos en el espacio de sucesiones de soporte finito

## Prerrequisitos

- Espacios vectoriales complejos.
- Funciones lineales y bilineales en espacios vectoriales.
- El producto interno canónico en  $\mathbb{C}^n$ .

# Plan

- 1 Definición de la forma sesquilineal
- 2 Ejemplos en el espacio de vectores
- 3 Ejemplos en el espacio de funciones continuas
- 4 Ejemplos en el espacio de sucesiones de soporte finito

## Definición de la forma sesquilineal

En este tema asumiremos que  $V$  es un espacio vectorial complejo.

### Definición

Una función  $f: V^2 \rightarrow \mathbb{C}$  se llama **forma sesquilineal** o **función sesquilineal**, si es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo, es decir, para cada  $a, b, c$  en  $V$  y cada  $\lambda, \mu$  en  $\mathbb{C}$ ,

$$f(\lambda a + \mu b, c) = \lambda f(a, c) + \mu f(b, c)$$

$$f(a, \lambda b + \mu c) = \bar{\lambda} f(a, b) + \bar{\mu} f(a, c).$$

# Plan

- 1 Definición de la forma sesquilineal
- 2 Ejemplos en el espacio de vectores**
- 3 Ejemplos en el espacio de funciones continuas
- 4 Ejemplos en el espacio de sucesiones de soporte finito

Ejemplo: la forma sesquilineal en  $\mathbb{C}^n$  asociada a un vector de peso

Sea  $p = [p_j]_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$ .

Ejemplo: la forma sesquilineal en  $\mathbb{C}^n$  asociada a un vector de peso

Sea  $p = [p_j]_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$ .

Definimos

$$f: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x, y) := \sum_{j=1}^n p_j x_j \bar{y}_j.$$



Ejemplo: la forma sesquilineal en  $\mathbb{C}^n$  asociada a un vector de peso

Sea  $p = [p_j]_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$ .

Definimos

$$f: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x, y) := \sum_{j=1}^n p_j x_j \bar{y}_j.$$

Entonces  $f$  es una forma sesquilineal.

Ejemplo: la forma sesquilineal en  $\mathbb{C}^n$  asociada a una matriz

Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , es decir, sea  $A$  una matriz compleja cuadrada  $n \times n$ .

## Ejemplo: la forma sesquilineal en $\mathbb{C}^n$ asociada a una matriz

Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , es decir, sea  $A$  una matriz compleja cuadrada  $n \times n$ .

Definimos

$$f: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x, y) := y^* Ax,$$

donde  $y^*$  es el vector transpuesto conjugado de  $y$ .

## Ejemplo: la forma sesquilineal en $\mathbb{C}^n$ asociada a una matriz

Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , es decir, sea  $A$  una matriz compleja cuadrada  $n \times n$ .

Definimos

$$f: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x, y) := y^* Ax,$$

donde  $y^*$  es el vector transpuesto conjugado de  $y$ .

En otras palabras,

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 & \dots & \bar{y}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j,k=1}^n A_{j,k} x_k \bar{y}_j.$$

Entonces  $f$  es una forma sesquilineal.

# Plan

- 1 Definición de la forma sesquilineal
- 2 Ejemplos en el espacio de vectores
- 3 Ejemplos en el espacio de funciones continuas**
- 4 Ejemplos en el espacio de sucesiones de soporte finito

## Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Sea  $V := C([a, b], \mathbb{C})$ , esto es,

$$V := \{x \in \mathbb{C}^{[a,b]} : f \text{ es continua}\}.$$

Sea  $p \in V$ . Definimos

$$f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x, y) := \int_a^b p(t)x(t)\overline{y(t)} dt.$$

## Ejemplo: la integral con peso

$$f(x, y) := \int_a^b \rho(t)x(t)\overline{y(t)} dt.$$

Es fácil ver que  $\rho x \bar{y} \in V$  y que la integral existe.

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que  $f$  es lineal respecto al primer argumento.



## Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que  $f$  es lineal respecto al primer argumento.

Sean  $x, y, z \in V$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y, z) &= \int_a^b \rho(t)(\lambda x(t) + \mu y(t))\overline{z(t)} dt \\ &= \lambda \int_a^b \rho(t)x(t)\overline{z(t)} dt + \mu \int_a^b \rho(t)y(t)\overline{z(t)} dt \\ &= \lambda f(x, z) + \mu f(y, z). \end{aligned}$$

## Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una integral con peso

Verifiquemos que  $f$  es lineal conjugada respecto al segundo argumento.

$$\begin{aligned} f(x, \lambda y + \mu z) &= \int_a^b \rho(t)x(t)(\overline{\lambda y(t) + \mu z(t)}) dt \\ &= \bar{\lambda} \int_a^b \rho(t)x(t)\overline{y(t)} dt + \bar{\mu} \int_a^b \rho(t)x(t)\overline{z(t)} dt \\ &= \bar{\lambda}f(x, y) + \bar{\mu}f(x, z). \end{aligned}$$

# Plan

- 1 Definición de la forma sesquilineal
- 2 Ejemplos en el espacio de vectores
- 3 Ejemplos en el espacio de funciones continuas
- 4 Ejemplos en el espacio de sucesiones de soporte finito

Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una suma con peso

Sea  $V$  el espacio vectorial de las sucesiones complejas  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  finitamente no nulas.

## Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una suma con peso

Sea  $V$  el espacio vectorial de las sucesiones complejas  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  finitamente no nulas.

También se conoce como el espacio de sucesiones de soporte finito.

## Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una suma con peso

Sea  $V$  el espacio vectorial de las sucesiones complejas  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  finitamente no nulas.

También se conoce como el espacio de sucesiones de soporte finito.

Formalmente,

$$V := \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n > k \quad x_n = 0 \right\}.$$

## Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una suma con peso

Sea  $V$  el espacio vectorial de las sucesiones complejas  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  finitamente no nulas.

También se conoce como el espacio de sucesiones de soporte finito.

Formalmente,

$$V := \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n > k \quad x_n = 0 \right\}.$$

Sea  $p = (p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Definimos  $f: V^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$f(x, y) := \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j x_j \bar{y}_j.$$

## Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una suma con peso

Mostremos que  $f$  es lineal respecto al primer argumento.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y, z) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j (\lambda x_j + \mu y_j) \bar{z}_j \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j (\lambda x_j \bar{z}_j + \mu y_j \bar{z}_j) \\ &= \lambda \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j x_j \bar{z}_j + \mu \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j y_j \bar{z}_j \\ &= \lambda f(x, z) + \mu f(y, z). \end{aligned}$$



## Ejemplo: la forma sesquilineal definida como una suma con peso

Mostremos que  $f$  es lineal conjugada respecto al segundo argumento.

$$\begin{aligned} f(x, \lambda y + \mu z) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j x_j (\overline{\lambda y_j + \mu z_j}) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j x_j (\overline{\lambda y_j} + \overline{\mu z_j}) \\ &= \overline{\lambda} \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j x_j \overline{y_j} + \overline{\mu} \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j x_j \overline{z_j} \\ &= \overline{\lambda} f(x, y) + \overline{\mu} f(x, z). \end{aligned}$$