Formas sesquilineales

Objetivos. Estudiar la definición y algunos ejemplos de formas sesquilineales.

Prerrequisitos. Funciones lineales y bilineales en espacios vectoriales. Para los ejemplos: operaciones con matrices, propiedades de las integrales de funciones continuas, propiedades de series.

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

1 Definición (forma sesqulineal)**.** Una función $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ se llama *forma sesquilineal* o *función sesquilineal*, si es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo argumento. Formalmente, esto significa que para cada a, b, c en V y cada λ, μ en $\mathbb{C}$,

$$
\begin{aligned}
f(\lambda a + \mu b, c) &= \lambda f(a, c) + \mu f(b, c),\\
f(a, \lambda b + \mu c) &= \overline{\lambda} f(a, b) + \overline{\mu} f(a, c).
\end{aligned}
$$

2 Observación. Podemos separar la definición de forma sesquilineal en 4 propiedades.

- f es aditiva respecto al primer argumento:
$$f(a + b, c) = f(a, c) + f(b, c). \tag{1}$$

- f es homogénea respecto al primer argumento:
$$f(\lambda a, b) = \lambda f(a, b). \tag{2}$$

- f es aditiva respecto al segundo argumento:
$$f(a, b + c) = f(a, b) + f(a, c). \tag{3}$$

- f es homogénea conjugada (“conjugadamente homogénea) respecto al segundo argumento:
$$f(a, \lambda b) = \overline{\lambda}\, f(a, b). \tag{4}$$

Ejemplos en el espacio $\mathbb{C}^n$

3 Ejemplo (la forma sesquilineal en $\mathbb{C}^n$ asociada a una matriz)**.** Sea $V = \mathbb{C}^n$ y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Definimos $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(u,v) \coloneqq v^* A u,$$

donde v^* es el vector v transpuesto conjugado. Por la definición de operaciones con vectores y matrices,

$$f(u,v) = \sum_{j=1}^{n} (Au)_j \overline{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} u_k \overline{v}_j.$$

4 Ejemplo (la forma sesquilineal en $\mathbb{C}^n$ asociada a un vector de pesos)**.** Sea $V = \mathbb{C}^n$ y sea $d \in \mathbb{C}^n$. Definimos $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(z,w) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} d_j z_j \overline{w_j}.$$

Esta forma sesquilineal se puede escribir como $f(z,w) = v^* D u$, donde $D \coloneqq \operatorname{diag}(d)$ es la matriz diagonal con las componentes $d_1, \ldots, d_n$ en la diagonal principal.

Ejemplos en el espacio de sucesiones de soporte finito

Denotemos por c_{fin} al espacio de las sucesiones de soporte finito:

$$c_{\text{fin}} \coloneqq \Big\{ z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\colon \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall j > k \quad z_j = 0 \Big\}.$$

5 Ejemplo. Sea $V = c_{\text{fin}}$ y sea $d \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Definimos $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(z,w) \coloneqq \sum_{j=1}^{\infty} d_j z_j \overline{w_j}.$$

Notemos que para cada z, w en c_{fin}, la serie se reduce a una suma finita, pero el número de los sumandos depende de z y w.

6 Ejemplo. Sea $V = c_{\text{fin}}$ y sea $M \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Definimos $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(z,w) \coloneqq \sum_{j,k=1}^{\infty} M_{j,k} z_k \overline{w_j}.$$

Notemos que para cada z, w en c_{fin}, la serie doble se reduce a una suma doble finita, pero el número de los sumandos depende de z y w.

Ejemplos en el espacio de funciones continuas

7 Ejemplo. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, y sea $V = C([a,b],\mathbb{C})$. Supongamos que $w \in C([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(u,v) \coloneqq \int_a^b w(t)u(t)\overline{v(t)}\,\mathrm{d}t.$$

8 Ejemplo. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, y sea $V = C([a,b],\mathbb{C})$. Supongamos que $K \in C([a,b]^2,\mathbb{C})$. Definimos $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(u,v) \coloneqq \int_a^b \int_a^b K(s,t)u(t)\overline{v(s)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s.$$

Ejemplos en ℓ^2

9 Ejemplo. Sea $d \in \ell^\infty$. Definimos $f\colon \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(z,w) \coloneqq \sum_{j=1}^\infty d_j z_j \overline{w_j}.$$

La convergencia absoluta de la serie se demuestra fácilmente usando la desigualdad de Hölder con $p = q = 2$ (o la versión límite de la desigualdad de Cauchy para vectores):

$$\sum_{j=1}^\infty |d_j z_j \overline{w_j}| \le \|d\|_\infty \sum_{j=1}^\infty |z_j \overline{w_j}| \le \|d\|_\infty \, \|z\|_2 \, \|w\|_2.$$