Series en espacios normados

(un tema de la unidad “Espacios normados”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

23 de septiembre de 2022

Objetivo:

- definir la convergencia de series en espacios normados,
- conocer las propiedades algebraicas simples.

Objetivo:

- definir la convergencia de series en espacios normados,
- conocer las propiedades algebraicas simples.

Aplicaciones:

- bases de Schauder,
- bases ortogonales (bases de Hilbert),
- series de Neumann.

Objetivo:

- definir la convergencia de series en espacios normados,
- conocer las propiedades algebraicas simples.

Aplicaciones:

- bases de Schauder,
- bases ortogonales (bases de Hilbert),
- series de Neumann.

Prerrequisitos:

- convergencia de sucesiones en espacios métricos o normados,
- espacios vectoriales.

Convergencia de series en un espacio normado

Definición (la suma de una serie en un espacio normado)

Sean V un espacio normado, $x \in V^{\mathbb{N}}$, $u \in V$.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge al vector u, y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = u$, si

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{k} x_n - u \right\| = 0.$$

Convergencia de series en un espacio normado

Definición (la suma de una serie en un espacio normado)

Sean V un espacio normado, $x \in V^{\mathbb{N}}$, $u \in V$.

Se dice que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge al vector u, y se escribe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = u$, si

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{k} x_n - u \right\| = 0.$$

Definición (serie convergente)

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente, si existe u en V tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = u$.

La suma de dos series

Proposición

Sean V un espacio normado, $x, y \in V^{\mathbb{N}}$, $v, w \in V$. Supongamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = v, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = w.$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = v + w.$$

Demostración: ejercicio.

El producto de una serie por un escalar

Proposición

Sean V un espacio normado, $x \in V^{\mathbb{N}}$, $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Supongamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = v.$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha\, x_n) = \alpha\, v.$$

Demostración: ejercicio.

Al cambiar el orden de los sumandos, se puede cambiar la suma de la serie

Por simplicidad, recomendamos trabajar en $V = \mathbb{C}$ o $V = \mathbb{R}$.

Al cambiar el orden de los sumandos, se puede cambiar la suma de la serie

Por simplicidad, recomendamos trabajar en $V = \mathbb{C}$ o $V = \mathbb{R}$.

Ejercicio. Construir una sucesión $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y una permutación $\rho\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge,

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_{\rho(n)}$ converge,

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} x_{\rho(n)}$.

Al cambiar el orden de los sumandos, se puede cambiar la suma de la serie

Ejercicio. Construir una sucesión $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y una permutación $\rho\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge,

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_{\rho(n)}$ converge,

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} x_{\rho(n)}$.

Al cambiar el orden de los sumandos, se puede cambiar la suma de la serie

Ejercicio. Construir una sucesión $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y una permutación $\rho\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge,

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_{\rho(n)}$ converge,

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} x_{\rho(n)}$.

Sugerencia: $\displaystyle x_n = \frac{(-1)^n}{n}.$

Al cambiar el orden de los sumandos,
se puede convertir una serie convergente en una serie divergente

Ejercicio. Construir una sucesión $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y una permutación $\rho\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge,

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_{\rho(n)}$ no converge.