Espacios métricos separables

1 Definición. Sea X un espacio métrico. Se dice que X es *separable* si existe un conjunto $D \subseteq X$ tal que D es a lo más numerable y denso en X.

Recordemos que D es denso en X si, y solo si, para cada x en X y cada $r > 0$ existe y en D tal que $d(x, y) < r$.

2 Ejemplo. Sea X un espacio métrico a los más numerable. Entonces X es separable.

Vamos a usar el siguiente hecho que se demuestra en otros cursos, cuando se construyen los números reales: si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$.

3 Ejemplo. El espacio métrico $\mathbb{R}$ es separable porque $\mathbb{Q}$ es su subconjunto numerable y denso. Mostremos que $\mathbb{Q}$ es denso. Dados x en $\mathbb{R}$ y $r > 0$, encontramos q en $(x-r, x+r)\cap\mathbb{Q}$. Entonces $q \in \mathbb{Q}$ y $d(x, q) < r$.

4 Ejemplo. Sea $n \in \mathbb{N}$. El espacio métrico $\mathbb{R}^n$ es separable porque $\mathbb{Q}^n$ es su subconjunto numerable y denso. Mostremos que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$. Sean $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Pongamos $\delta = r/\sqrt{n}$. Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$ encontramos $y_j \in (x_j - \delta, x_j + \delta)$. Entonces $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{Q}^n$ y

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2} < \sqrt{n\,\frac{r^2}{n}} = r.$$

5 Ejemplo. El espacio métrico $\mathbb{C}$ es separable, porque $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q}$ es su subconjunto numerable y denso. En efecto, como espacio métrico $\mathbb{C}$ se puede identificar con $\mathbb{R}^2$.

El espacio de sucesiones finitas es separable

6 Definición (el soporte de una sucesión)**.** Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$. El *soporte* de x se define como

$$\operatorname{supp}(x) \coloneqq \{j \in \mathbb{N}\colon\ x_j \neq 0\}.$$

7 Definición (el conjunto de las sucesiones finitas)**.** Sea $\mathbb{F}$ un campo. Denotemos por $\mathcal{F}(\mathbb{F})$ al espacio de las sucesiones con valores en $\mathbb{F}$ que tienen soporte finito:

$$\mathcal{F}(\mathbb{F}) \coloneqq \{x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}\colon\ \operatorname{supp}(x) \text{ es finito}\}.$$

8 Proposición.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathbb{F}) &= \{x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}\colon \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \operatorname{supp}(x) \subseteq \{1, \ldots, n\}\}\\ &= \{x \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}\colon \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall j > n \quad x_j = 0\}.\end{aligned}$$

9 Proposición. *Si $\mathbb{F}$ es numerable, entonces $\mathcal{F}(\mathbb{F})$ es numerable.*

Demostración. Para cada n en $\mathbb{N}$, denotemos por A_n al conjunto de las sucesiones x en $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ tales que $\operatorname{supp}(x) \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Definimos $g_n\colon \mathbb{F}^n \to A_n$ mediante la regla

$$g_n(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Es fácil ver que g_n es una biyección. Por secuencia, A_n es numerable. Ahora notamos que

$$\mathcal{F}(\mathbb{F}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Concluimos que el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{F})$ es numerable por ser una unión numerable de conjuntos numerables. □

10 Proposición. *El espacio $\mathcal{F}(\mathbb{C})$, dotado de la norma-supremo y de la métrica correspondiente, es separable.*

Demostración. Por la Proposición 9, el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})$ es numerable. Demostremos que $\mathcal{F}(\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})$ es denso en $\mathcal{F}(\mathbb{C})$. Dados x en $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ y $\varepsilon > 0$, encontremos n en $\mathbb{N}$ tal que $\operatorname{supp}(x) \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Usando la densidad de $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$, para cada j en $\{1, \ldots, n\}$ encontremos y_j en $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q}$ tal que $|y_j - x_j| < \varepsilon$. Pongamos

$$y \coloneqq (y_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots).$$

Entonces $y \in \mathcal{F}(\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})$ y

$$\|y - x\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |y_j - x_j| < \varepsilon.$$ □

11 Proposición. *Sea X un espacio métrico y sea Y un subconjunto denso de X. Supongamos que Y, considerado como subespacio métrico de X, es separable. Entonces X es separable.*

Demostración. Sea D un subconjunto de Y, a lo más numerable y tal que $\operatorname{cl}_Y(D) = Y$. Mostremos que $\operatorname{cl}_X(D) = X$. Sean $x \in X$, $r > 0$. Usando la suposición que $\operatorname{cl}_X(Y) = X$ encontramos y en Y tal que $d(x, y) < r/2$. Usando la suposición que $\operatorname{cl}_Y(D) = Y$ encontramos z en D tal que $d_Y(y, z) < r/2$. Como d_Y es la restricción de la función d al conjunto $Y \times Y$, obtenemos que $d(y, z) < r/2$. Luego

$$d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z) < r.$$ □

12 Proposición. *El espacio $c_0(\mathbb{N})$ es separable.*

Demostración. En efecto, $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ es un subespacio de $c_0(\mathbb{N})$. Este subespacio es denso en $c_0(\mathbb{N})$ y separable. $\square$

Para los espacios métricos, la propiedad de ser separable se hereda

13 Teorema. *Sea X un espacio métrico separable y sea $Y \subseteq X$. Entonces Y, considerado como subespacio métrico de X, también es separable.*

Demostración. Sea D un subconjunto de X tal que D es a lo más numerable y denso en X. Usando la suposición que D es a los más numerable, encontramos una sucesión $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $D^{\mathbb{N}}$ tal que $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\} = D$.

Definimos un subconjunto de $\mathbb{N}^2$:

$$P \coloneqq \{(k, m) \in \mathbb{N}^2\colon\ d(a_k, Y) < 1/m\}.$$

Para cada par (k, m) en P encontramos $b_{k,m}$ en Y tal que $d(a_k, b_{k,m}) < 1/m$. Pongamos

$$E \coloneqq \{b_{k,m}\colon\ (k, m) \in P\}.$$

Como $P \subseteq \mathbb{N}^2$, P es a lo más numerable, y E también. Mostremos que E es denso en X. Dado y en Y y $r > 0$, elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que $m > \frac{2}{r}$, esto es, $\frac{1}{m} < \frac{r}{2}$. Usando la densidad de D en X encontramos k en $\mathbb{N}$ tal que $d(y, a_k) < \frac{1}{m}$. Notamos que $d(a_k, Y) \le d(a_k, y) < \frac{1}{m}$. Luego $(k, m) \in P$, y está bien definido el punto $b_{k,m}$ tal que $b_{k,m} \in Y$ y $d(a_k, b_{k,m}) < 1/m$. Por eso

$$d(y, b_{k,m}) \le d(y, a_k) + d(a_k, b_{k,m}) < \frac{2}{m} < r. \qquad \square$$

Espacios métricos no separables

14 Proposición. *Sean X un espacio métrico, M un subconjunto de X, infinito y no numerable, y $\delta > 0$. Supongamos que para cualesquiera a, b en M con $a \neq b$ se cumple la desigualdad $d(a, b) \ge \delta$. Entonces X no es separable.*

Demostración. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que X es separable. Entonces, por el Teorema 13, su subespacio M también es separable. Sea D un subconjunto de M, a lo más numerable y denso en M. Para cada a en M, usando la densidad de D en M, encontramos b en D tal que $d(a,b) < \delta$. Si $b \neq a$, entonces por la suposición $d(a,b) \geq \delta$. Luego b debe coincidir con a. Hemos demostrado que $D = M$, pero D es finito o numerable, mientras que M es infinito y no numerable. Contradicción. □

15 Proposición. *El espacio* $\ell^\infty(\mathbb{N})$ *no es separable.*

Demostración. Para cada subconjunto A de $\mathbb{N}$ consideremos la sucesión $u_A \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ definida como

$$u_A(k) \coloneqq \begin{cases} 1, & k \in A; \\ 0, & k \in \mathbb{N} \setminus A. \end{cases}$$

En otras palabras, u_A es la función característica de A. Pongamos

$$M \coloneqq \{u_A \colon \ A \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Entonces M es infinito y no numerable. Si $A, B \subseteq \mathbb{N}$ y $A \neq B$, entonces $d_\infty(u_A, u_B) = \|u_A - u_B\|_\infty = 1$. Por la Proposición 14 concluimos que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ no es separable. □