Espacios normados separables y no separables

(un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko

www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)

Escuela Superior de Física y Matemáticas

18 de marzo de 2022

1. Los espacios normados con bases de Schauder son separables
2. Ejemplos de espacios normados separables
3. Espacios normados no separables

Plan

Base de Schauder (repaso)

Sea V un espacio normado complejo y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V.

Se dice que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder en V si

$$\forall v \in V \qquad \exists!\ \lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \qquad v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k.$$

Base de Schauder (repaso)

Sea V un espacio normado complejo y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V.
Se dice que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder en V si

$$\forall v \in V \qquad \exists!\ \lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \qquad v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k.$$

La última igualdad se entiende en el siguiente sentido:

$$\lim_{m\to\infty} \left\| v - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k \right\| = 0.$$

Base de Schauder (repaso)

Sea V un espacio normado complejo y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V.

Se dice que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder en V si

$$\forall v \in V \qquad \exists!\ \lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \qquad v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k.$$

La última igualdad se entiende en el siguiente sentido:

$$\lim_{m\to\infty} \left\| v - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k \right\| = 0.$$

Observación: una base de Schauder **no** es un conjunto, es una sucesión.

El orden de los elementos puede ser importante (tarea pequeña).

Espacios métricos separables (repaso)

Sea X un espacio métrico (o topológico).

Se dice que X es separable si existe $A \subseteq X$ tal que A es numerable y $\mathrm{clos}(A) = X$.

Espacios métricos separables (repaso)

Sea X un espacio métrico (o topológico).

Se dice que X es separable si existe $A \subseteq X$ tal que A es numerable y $\operatorname{clos}(A) = X$.

Proposición (repaso)

Sea X un espacio métrico separable y sea $Y \subseteq X$.

Entonces Y es separable.

Bases de Schauder y separabilidad

Proposición

Sea V un espacio normado complejo que tiene una base de Schauder.

Entonces V es separable.

Bases de Schauder y separabilidad

Proposición

Sea V un espacio normado complejo que tiene una base de Schauder.

Entonces V es separable.

Un resultado similar se cumple también para espacios normados reales.

Inicio de la demostración

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en V.

Inicio de la demostración

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en V.

Para cada m en $\mathbb{N}$,

$$L_m := \left\{ \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k \colon \quad \xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q} \right\}.$$

Inicio de la demostración

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en V.

Para cada m en $\mathbb{N}$,

$$L_m := \left\{ \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k : \quad \xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q} \right\}.$$

Pongamos

$$D := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} L_m.$$

Inicio de la demostración

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en V.

Para cada m en $\mathbb{N}$,

$$L_m := \left\{ \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k : \quad \xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q} \right\}.$$

Pongamos

$$D := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} L_m.$$

Mostremos que D es numerable y denso en V.

Demostración: D es numerable

Sabemos que $(\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})^m$ es numerable.

Demostración: D es numerable

Sabemos que $(\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})^m$ es numerable.

$$T_m \colon (\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})^m \to L_m, \qquad T_m(\xi) := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Demostración: D es numerable

Sabemos que $(\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})^m$ es numerable.

$$T_m \colon (\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})^m \to L_m, \qquad T_m(\xi) := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

T_m es una función biyectiva, luego L_m es numerable.

Demostración: D es numerable

Sabemos que $(\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})^m$ es numerable.

$$T_m\colon (\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})^m \to L_m, \qquad T_m(\xi) := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

T_m es una función biyectiva, luego L_m es numerable.

D es numerable siendo una unión numerable de conjuntos numerables:

$$D := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} L_m.$$

Demostración: D es denso en V

Sean $v \in V$, $\varepsilon > 0$. Aproximamos v por una combinación lineal finita de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\|v - s_n\| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{donde} \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k.$$

Demostración: D es denso en V

Sean $v \in V$, $\varepsilon > 0$. Aproximamos v por una combinación lineal finita de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\|v - s_n\| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{donde} \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k.$$

Pongamos $M := \sum_{k=1}^{n} \|a_k\|$.

Demostración: D es denso en V

Sean $v \in V$, $\varepsilon > 0$. Aproximamos v por una combinación lineal finita de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\|v - s_n\| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{donde} \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k.$$

Pongamos $M := \sum_{k=1}^{n} \|a_k\|$. Elegimos $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q}$ tales que $|\xi_k - \lambda_k| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

$$w := \sum_{k=1}^{n} \xi_k a_k.$$

Entonces $w \in D$ y $\|v - w\| \leq \|v - s_n\| + \|s_n - y\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \lambda_k|\,\|a_k\| < \varepsilon$.

Plan

ℓ^p, $1 \leq p < +\infty$

Proposición

Sea $p \in [1, +\infty)$. Entonces $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder de ℓ^p.

ℓ^p, $1 \leq p < +\infty$

Proposición

Sea $p \in [1, +\infty)$. Entonces $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder de ℓ^p.

Demostración de la unicidad de descomposición.

Sean $x \in \ell^p$ y $\lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tales que $\lim_{m \to \infty} \|x - s_m\|_p = 0$, donde $s_m := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k$.

Fijamos q en $\mathbb{N}$. Si $m \geq q$, entonces $(x - s_m)_q = x_q - \lambda_q$, y

$$|x_q - \lambda_q| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k - \lambda_k|^p \right)^{1/p} \leq \|x - s_m\|_p.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$. Concluimos que $\lambda_q = x_q$.

Demostración de la existencia.

Sea $x \in \ell^p$. Notemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty, \qquad \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p = 0.$$

Demostración de la existencia.

Sea $x \in \ell^p$. Notemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty, \qquad \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p = 0.$$

Pongamos $\lambda_k := x_k$ para cada k en $\mathbb{N}$. Si m en $\mathbb{N}$,

$$s_m := \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j = (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, 0, \ldots), \qquad (x - s_m)_k = \begin{cases} 0, & 1 \le k \le m; \\ x_k, & k \ge m+1. \end{cases}$$

Demostración de la existencia.

Sea $x \in \ell^p$. Notemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty, \qquad \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p = 0.$$

Pongamos $\lambda_k \coloneqq x_k$ para cada k en $\mathbb{N}$. Si m en $\mathbb{N}$,

$$s_m \coloneqq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j = (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, 0, \ldots), \qquad (x - s_m)_k = \begin{cases} 0, & 1 \le k \le m; \\ x_k, & k \ge m+1. \end{cases}$$

Entonces

$$\lim_{m\to\infty} \|x - s_m\|_p = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} = 0.$$

Ejercicio. Mostrar que $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de c_0.

Ejercicio. Mostrar que $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de c_0.

Ejercicio interesante. Encontrar una base de Schauder en c.

Los espacios $L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < +\infty$ son separables

Mini-tarea.

Sea $1 \leq p < +\infty$. Demostrar que $L^p([0,1])$ es separable.

Mini-tarea.

Sea $1 \leq p < +\infty$. Demostrar que $L^p(\mathbb{R})$ es separable.

El espacio $C([0,1])$ es separable

Ejercicio.

Demostrar que $C([0,1])$ es separable.

El espacio $C([0,1])$ es separable

Ejercicio.

Demostrar que $C([0,1])$ es separable.

Sugerencia. Aquí no conocemos ninguna base de Schauder. Tenemos que usar otra idea.

El espacio $C([0,1])$ es separable

Ejercicio.
Demostrar que $C([0,1])$ es separable.

Sugerencia. Aquí no conocemos ninguna base de Schauder. Tenemos que usar otra idea.

Aplicar el teorema de Weierstrass sobre la aproximación uniforme de funciones continuas por polinomios.

El espacio $C([0,1])$ es separable

Ejercicio.
Demostrar que $C([0,1])$ es separable.

Sugerencia. Aquí no conocemos ninguna base de Schauder. Tenemos que usar otra idea.

Aplicar el teorema de Weierstrass sobre la aproximación uniforme de funciones continuas por polinomios.

Aproximar polinomios arbitrarios por polinomios con coeficientes del campo $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q}$.

Plan

Repaso: espacios métricos no separables

Proposición

Sea X un espacio métrico. Supongamos que existen $\delta > 0$ y un subconjunto A de X tales que A infinito no numerable y

$$\forall a, b \in A \qquad \Big(a \neq b \qquad \Longrightarrow \qquad d(a, b) \geq \delta\Big).$$

Entonces X no es separable.

Repaso: espacios métricos no separables

Proposición

Sea X un espacio métrico. Supongamos que existen $\delta > 0$ y un subconjunto A de X tales que A infinito no numerable y

$$\forall a, b \in A \qquad \Big(a \neq b \qquad \Longrightarrow \qquad d(a, b) \geq \delta\Big).$$

Entonces X no es separable.

Idea de demostración.

Repaso: espacios métricos no separables

Proposición

Sea X un espacio métrico. Supongamos que existen $\delta > 0$ y un subconjunto A de X tales que A infinito no numerable y

$$\forall a, b \in A \qquad \Big(a \neq b \qquad \Longrightarrow \qquad d(a, b) \geq \delta\Big).$$

Entonces X no es separable.

Idea de demostración.

Supongamos que X es separable.

Repaso: espacios métricos no separables

Proposición

Sea X un espacio métrico. Supongamos que existen $\delta > 0$ y un subconjunto A de X tales que A infinito no numerable y

$$\forall a, b \in A \qquad \Big(a \neq b \qquad \Longrightarrow \qquad d(a, b) \geq \delta\Big).$$

Entonces X no es separable.

Idea de demostración.

Supongamos que X es separable. Entonces A es separable.

Repaso: espacios métricos no separables

Proposición

Sea X un espacio métrico. Supongamos que existen $\delta > 0$ y un subconjunto A de X tales que A infinito no numerable y

$$\forall a, b \in A \qquad \Big(a \neq b \qquad \Longrightarrow \qquad d(a, b) \geq \delta\Big).$$

Entonces X no es separable.

Idea de demostración.

Supongamos que X es separable. Entonces A es separable.

Sea D un subconjunto denso de A.

Repaso: espacios métricos no separables

Proposición

Sea X un espacio métrico. Supongamos que existen $\delta > 0$ y un subconjunto A de X tales que A infinito no numerable y

$$\forall a, b \in A \qquad \Big(a \neq b \qquad \Longrightarrow \qquad d(a, b) \geq \delta\Big).$$

Entonces X no es separable.

Idea de demostración.

Supongamos que X es separable. Entonces A es separable.

Sea D un subconjunto denso de A. Entonces $D = A$.

El espacio ℓ^∞ no es separable

Proposición

ℓ^∞ no es separable.

El espacio ℓ^∞ no es separable

Proposición

ℓ^∞ no es separable.

Idea de demostración. Sea

$$A :=$$

El espacio ℓ^∞ no es separable

Proposición

ℓ^∞ no es separable.

Idea de demostración. Sea

$$A := \{1_X : \ X \subseteq \mathbb{N}\}.$$

El espacio ℓ^∞ no es separable

Proposición

ℓ^∞ no es separable.

Idea de demostración. Sea

$$A := \{1_X : \ X \subseteq \mathbb{N}\}.$$

A no es numerable.

El espacio ℓ^∞ no es separable

Proposición

ℓ^∞ no es separable.

Idea de demostración. Sea

$$A := \{1_X \colon\ X \subseteq \mathbb{N}\}.$$

A no es numerable. Más aún, si $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq Y$, entonces

El espacio ℓ^∞ no es separable

Proposición

ℓ^∞ no es separable.

Idea de demostración. Sea

$$A := \{1_X : \ X \subseteq \mathbb{N}\}.$$

A no es numerable. Más aún, si $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq Y$, entonces $\|1_X - 1_Y\|_\infty = 1$.

El espacio ℓ^∞ no es separable

Proposición

ℓ^∞ no es separable.

Idea de demostración. Sea

$$A := \{1_X : \ X \subseteq \mathbb{N}\}.$$

A no es numerable. Más aún, si $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq Y$, entonces $\|1_X - 1_Y\|_\infty = 1$.

Corolario

ℓ^∞ no tiene base de Schauder.

El espacio $L^\infty([0,1])$ no es separable

Ejercicio.

Demostrar que $L^\infty([0,1])$ no es separable.

El espacio $L^\infty([0,1])$ no es separable

Ejercicio.

Demostrar que $L^\infty([0,1])$ no es separable.

Sugerencia. Construir un conjunto $A \subseteq L^\infty([0,1])$ con las siguientes propiedades:

- A no es numerable;
- para cada f, g en A con $f \neq g$,
$$\|f - g\|_\infty \geq 1.$$