

Semianillos de conjuntos

Objetivos. Definir semianillos y anillos de conjuntos. Demostrar que el producto directo de semianillos es un semianillo.

Requisitos. Operaciones con conjuntos, σ -álgebras de conjuntos.

1 Definición (semianillo de conjuntos). Sea X un conjunto. Un conjunto $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ se llama *semianillo* sobre X si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $\emptyset \in \mathcal{S}$.
2. Para cualesquiera A, B en \mathcal{S} , se tiene que $A \cap B \in \mathcal{S}$.
3. Para cualesquiera A, B en \mathcal{S} , existe un número n en \mathbb{N} y existen conjuntos C_1, \dots, C_n en \mathcal{S} disjuntos por pares tales que

$$A \setminus B = C_1 \cup \dots \cup C_n.$$

2 Observación. Algunos autores no piden $\emptyset \in \mathcal{S}$ en la definición del semianillo y en la última condición permiten $n = 0$, es decir, permiten que la colección $(C_j)_{j=1}^n$ sea vacía.

3 Definición (semiálgebra de conjuntos). Un semianillo de conjuntos $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ se llama *semiálgebra* sobre X , si $X \in \mathcal{S}$.

4 Proposición. Sea X un conjunto. Entonces cada σ -álgebra sobre X es un semianillo y una semiálgebra sobre X .

5 Ejemplo (semianillos sobre un conjunto de dos elementos). Sea $X = \{0, 1\}$. Para cada una de las siguientes colecciones de conjuntos determine si es un semianillo o no:

1. \emptyset .
2. $\{\emptyset\}$.
3. $\{\{0\}\}$.
4. $\{\emptyset, \{0\}\}$.
5. $\{\emptyset, \{0, 1\}\}$.
6. $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$.
7. $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$.
8. $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

6 Ejemplo (los conjuntos unipuntuales y el vacío). Sea X un conjunto. Denotemos por \mathcal{S} a la colección formada por el conjunto vacío y por todos los subconjuntos unipuntuales de X :

$$\mathcal{S} = \{\emptyset\} \cup \{\{a\} : a \in X\} = \left\{ Y \subseteq X : Y = \emptyset \quad \vee \quad (\exists a \in X \quad Y = \{a\}) \right\}.$$

Entonces \mathcal{S} es un semianillo sobre X .

7 Ejemplo (los intervalos semiabiertos del eje real). Sea $X = \mathbb{R}$ y sea

$$\mathcal{S} := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Demuestre que \mathcal{S} es un semianillo sobre X .

8 Ejercicio (intervalos del eje real, repaso de topología). Se puede demostrar que para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) A es convexo: para cualesquiera $x, y \in A$ y $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.
- (b) A es conexo, es decir, no existen conjuntos abiertos $U, V \subseteq \mathbb{R}$ tales que $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$, $A \subseteq U \cup V$.
- (c) $(\inf(A), \sup(A)) \subseteq A$.
- (d) Existen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $(a, b) \subseteq A \subseteq [a, b]$.
- (e) A tiene una de las siguientes formas (donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$):

$$\begin{array}{cccccc} \mathbb{R}, & [a, +\infty), & (a, +\infty), & (-\infty, b], & (-\infty, b), & \\ [a, b], & [a, b), & (a, b], & (a, b), & \{a\}, & \emptyset. \end{array}$$

Los conjuntos que satisfacen cualquier de estas condiciones se llaman *intervalos del eje real*.

9 Ejemplo. Sea $X = \mathbb{R}$ y sea \mathcal{S} el conjunto de todos los intervalos en X . Entonces \mathcal{S} es una semiálgebra sobre X .

10 Ejercicio. Sea $X = \{0, 1, 2\}$. Construya dos semianillos $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq 2^X$ tales que su intersección $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ no sea un semianillo.

11 Teorema (el producto de semianillos es semianillo). Sean X e Y algunos conjuntos y sean \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 semianillos sobre X e Y , respectivamente. Entonces el conjunto \mathcal{S}_3 definido de la siguiente manera es un semianillo sobre $X \times Y$:

$$\mathcal{S}_3 := \{A \times B : A \in \mathcal{S}_1, B \in \mathcal{S}_2\}.$$

Idea de demostración.

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup ((A \cap C) \times (B \setminus D)),$$

donde los conjuntos $((A \setminus C) \times B)$ y $((A \cap C) \times (B \setminus D))$ son disjuntos. □