Anillos de conjuntos
(un tema de análisis real)

Egor Maximenko, Luis Angel González Serrano

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

22 de abril de 2024

Objetivos.

- Definir anillos y álgebras de conjuntos.
- Demostrar que la intersección de anillos es un anillo.
- Definir el anillo generado por una colección de conjuntos.
- Describir de manera explícita el anillo generado por un semianillo.

Prerrequisitos.

- Operaciones con conjuntos.
- Semianillos de conjuntos.
- σ-álgebras de conjuntos.
- Propiedades de particiones de conjuntos.

Anillo de conjuntos

Definición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Se dice que $\mathcal{A}$ es anillo de conjuntos sobre X, si:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cup B \in \mathcal{A}$;
3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \setminus B \in \mathcal{A}$.

En vez de “anillo de conjuntos sobre X”,

se dice brevemente “anillo de conjuntos” o “anillo”.

Ejemplo trivial: el conjunto potencia

Sea X un conjunto.

Entonces, $\mathcal{P}(X)$ es un anillo sobre X.

Ejemplo de un anillo

Sea X un conjunto.

$\mathcal{A} :=$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de X.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo sobre X.

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X. Entonces, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la intersección de dos conjuntos y la diferencia simétrica de dos conjuntos:

$$\begin{aligned} &\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A}; \\ &\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \triangle B \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X. Entonces, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la intersección de dos conjuntos y la diferencia simétrica de dos conjuntos:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A};$$
$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \triangle B \in \mathcal{A}.$$

Idea de demostración.

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X.
Entonces, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la intersección de dos conjuntos y la diferencia simétrica de dos conjuntos:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A};$$

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \triangle B \in \mathcal{A}.$$

Idea de demostración.

$$A \cap B$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X.
Entonces, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la intersección de dos conjuntos y la diferencia simétrica de dos conjuntos:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A};$$

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \triangle B \in \mathcal{A}.$$

Idea de demostración.

$$A \cap B =$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X. Entonces, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la intersección de dos conjuntos y la diferencia simétrica de dos conjuntos:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A};$$

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \triangle B \in \mathcal{A}.$$

Idea de demostración.

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B),$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X. Entonces, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la intersección de dos conjuntos y la diferencia simétrica de dos conjuntos:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A};$$

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \triangle B \in \mathcal{A}.$$

Idea de demostración.

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B), \qquad\qquad A \triangle B$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X. Entonces, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la intersección de dos conjuntos y la diferencia simétrica de dos conjuntos:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A};$$

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \triangle B \in \mathcal{A}.$$

Idea de demostración.

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B), \qquad\qquad A \triangle B =$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X.
Entonces, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la intersección de dos conjuntos y la diferencia simétrica de dos conjuntos:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A};$$

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \triangle B \in \mathcal{A}.$$

Idea de demostración.

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B), \qquad A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$;
3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$;
3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

Idea de demostración.

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$;
3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

Idea de demostración.

$$A \cup B$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$;
3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

Idea de demostración.

$$A \cup B =$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$;
3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

Idea de demostración.

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B),$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$;
3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

Idea de demostración.

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B), \qquad A \setminus B$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$;
3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

Idea de demostración.

$$A \cup B \;=\; (A \triangle B) \triangle (A \cap B), \qquad A \setminus B \;=$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$;
3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

Idea de demostración.

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B), \qquad A \setminus B = A \triangle (A \cap B).$$

$\mathcal{P}(X)$ con la operación binaria $\cup$ no es un grupo

Sea X un conjunto.

Consideremos $\cup$ como una operación binaria en $\mathcal{P}(X)$.

$\mathcal{P}(X)$ con la operación binaria $\cup$ no es un grupo

Sea X un conjunto.

Consideremos $\cup$ como una operación binaria en $\mathcal{P}(X)$.

Sabemos que $\cup$ es asociativa y conmutativa.

$\mathcal{P}(X)$ con la operación binaria $\cup$ no es un grupo

Sea X un conjunto.

Consideremos $\cup$ como una operación binaria en $\mathcal{P}(X)$.

Sabemos que $\cup$ es asociativa y conmutativa.

Notemos que el conjunto vacío $\emptyset$ es un elemento neutro para $\cup$:

$$\forall A \in \mathcal{P}(X) \qquad A \cup \emptyset = A.$$

$\mathcal{P}(X)$ con la operación binaria $\cup$ no es un grupo

Sea X un conjunto.

Consideremos $\cup$ como una operación binaria en $\mathcal{P}(X)$.

Sabemos que $\cup$ es asociativa y conmutativa.

Notemos que el conjunto vacío $\emptyset$ es un elemento neutro para $\cup$:

$$\forall A \in \mathcal{P}(X) \qquad A \cup \emptyset = A.$$

Mostrar que si $A \neq \emptyset$, entonces no existe $B \in \mathcal{P}(X)$ tal que

$$A \cup B = \emptyset.$$

Repaso: operación xor y la diferencia simétrica

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ejercicio

Demostrar que

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \Big\{x: \quad (x \in A) \oplus (x \in B)\Big\}.$$

$\mathcal{P}(X)$ con la operación $\triangle$ es un grupo

1. Demostrar que $\triangle$ es asociativa:

$$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(X) \qquad (A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

2. Demostrar que $\triangle$ es conmutativa:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X) \qquad A \triangle B = B \triangle C.$$

3. Demostrar que $\emptyset$ es un elemento neutro para $\triangle$:

$$\forall A \in \mathcal{P}(X) \qquad A \triangle \emptyset = A.$$

4. Dado A en $\mathcal{P}(X)$, encontrar B en $\mathcal{P}(X)$ tal que $A \triangle B = \emptyset$.

$\mathcal{P}(X)$ con las operaciones $\triangle$ y $\cap$ es un anillo en el sentido de álgebra moderna

1. Demostrar la ley distributiva:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

2. Demostrar que $\cap$ es asociativa y conmutativa.
3. Demostrar que X es un elemento neutro para $\cap$.

Álgebra de conjuntos

Definición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos sobre X,

si $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos y $X \in \mathcal{A}$.

Álgebra de conjuntos, otra descripción equivalente

Ejercicio

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Demuestre que $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos sobre X

si, y solo si, $\mathcal{A}$ tiene las siguientes propiedades:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
2) $\forall A \in \mathcal{A} \quad X \setminus A \in \mathcal{A}$,
3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cup B \in \mathcal{A}$.

Álgebra de conjuntos, otra descripción equivalente

Ejercicio

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Demuestre que $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos sobre X

si, y solo si, $\mathcal{A}$ tiene las siguientes propiedades:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
2) $\forall A \in \mathcal{A} \quad X \setminus A \in \mathcal{A}$,
3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cup B \in \mathcal{A}$.

En otras palabras,

en vez de pedir que $\mathcal{A}$ sea cerrada bajo la diferencia y tenga elemento X,

se puede pedir que $\mathcal{A}$ sea cerrada bajo los complementos respecto a X.

Ejemplo de una colección que no es anillo

Sean $X = \{0, 1, 2\}$,

$$\mathcal{A} \coloneqq \Big\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\Big\}.$$

Muestre que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo $\cup$ y $\cap$, pero no es anillo.

Relación de anillos con otras estructuras

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. Demuestre que si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra sobre X, entonces $\mathcal{A}$ es un álgebra sobre X y, en particular, un anillo.

2. Demuestre que si $\mathcal{A}$ es un anillo, entonces $\mathcal{A}$ es un semianillo.

Intersección de anillos es un anillo

Proposición

Sea X un conjunto y sea Φ un conjunto de anillos sobre X.

Consideremos la intersección de todos los elementos de Φ:

$$\mathcal{R} := \bigcap \Phi, \qquad \text{esto es,} \qquad \mathcal{R} = \bigcap_{\mathcal{A}\in\Phi} \mathcal{A},$$

esto es,

$$\mathcal{R} = \Big\{ B \subseteq X \colon \quad \forall \mathcal{A} \in \Phi \quad B \in \mathcal{A} \Big\}.$$

Entonces, $\mathcal{R}$ es un anillo.

Demostración

Veamos la demostración ahora en clase.

¿Quién quiere hacerla en el pizarrón?

El anillo generado por una colección de conjuntos

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

El anillo generado por una colección de conjuntos

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Consideremos el conjunto de todos los anillos que contienen a $\mathcal{C}$:

$$\Phi \coloneqq \Big\{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \colon \quad \mathcal{A} \text{ es un anillo} \quad \wedge \quad \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \Big\}.$$

Sea $\mathcal{R}$ la intersección de todos los anillos que contienen a $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{R} \coloneqq \bigcap \Phi, \quad \text{esto es,} \quad \mathcal{R} = \bigcap_{\mathcal{A} \in \Phi} \mathcal{A}.$$

Entonces, por la proposición anterior, $\mathcal{R}$ es un anillo. Obviamente, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}$.

Por lo tanto, $\mathcal{R} \in \Phi$.

Por ser la intersección de Φ, $\mathcal{R}$ es el elemento mínimo de Φ.

El anillo generado por una colección de conjuntos

Definición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Consideremos el conjunto de todos los anillos que contienen a $\mathcal{C}$:

$$\Phi := \Big\{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \colon \quad \mathcal{A} \text{ es un anillo} \quad \wedge \quad \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \Big\}.$$

Sea

$$\mathcal{R} := \bigcap \Phi.$$

$\mathcal{R}$ se llama el anillo generado por $\mathcal{C}$.

Ejemplo

Sea X un conjunto.

Consideremos las siguientes colecciones de subconjuntos de X:

$$\mathcal{C} := \{\emptyset\} \cup \left\{ Y \subseteq X \colon\ \exists a \in X \quad Y = \{a\} \right\},$$

$$\mathcal{A} := \left\{ Y \subseteq X \colon \quad Y \text{ es finito} \right\}.$$

Demuestre que $\mathcal{A}$ es el anillo generado por $\mathcal{C}$.

Descripción del anillo generado por un semianillo

Teorema

Sea $\mathcal{S}$ un semianillo sobre X.

Denotemos por $\mathcal{A}$ al conjunto de todos los subconjuntos de X que se pueden escribir como uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{A} := \left\{ B \in \mathcal{P}(X) \colon \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \exists P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{S} \quad \text{disj. a pares}, \quad B = \bigcup_{k=1}^{m} P_k \right\}.$$

Entonces, $\mathcal{A}$ es el anillo generado por $\mathcal{S}$.

Veremos una demostración en la próxima clase.

Se recomienda el siguiente plan.

Plan de demostración

1. Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.
2. Si $r \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{A}$ y $A_1, \ldots, A_r$ son disjuntos a pares, entonces $\bigcup_{j=1}^{r} A_j \in \mathcal{A}$.
3. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$.
4. Si $r \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcap_{j=1}^{r} A_j \in \mathcal{A}$.
5. Si $P, Q \in \mathcal{S}$, entonces $P \setminus Q \in \mathcal{A}$.
6. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$.
7. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.
8. $\mathcal{A}$ es un anillo sobre X.
9. Si $\mathcal{H}$ es un anillo sobre X tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$.