

Anillos de conjuntos

Objetivos. Definir anillos y álgebras de conjuntos. Describir de manera explícita el anillo generado por un semianillo.

Requisitos. Operaciones con conjuntos, semianillo de conjuntos, σ -álgebras de conjuntos.

1 Definición (anillo de conjuntos). Sea X un conjunto. Un conjunto $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ se llama *anillo* sobre X si $\emptyset \in \mathcal{A}$ y \mathcal{A} es cerrado bajo las operaciones de la unión de dos conjuntos y la diferencia de dos conjuntos:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$.
3. Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

2 Definición (álgebra de conjuntos). Un conjunto \mathcal{A} se llama *álgebra de conjuntos* sobre X si \mathcal{A} es un anillo de conjunto de conjuntos y $X \in \mathcal{A}$.

3 Proposición (intersección de anillos es anillo). Sea \mathfrak{A} un conjunto de anillos sobre un conjunto X . Consideremos la intersección de todos los elementos de \mathfrak{A} :

$$\mathcal{R} = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}} \mathcal{A} = \{B \subseteq X : \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{A} \quad B \in \mathcal{A}\}$$

Entonces \mathcal{R} es un anillo.

4 Corolario. Sea $\mathcal{C} \subseteq 2^X$. Denotemos por \mathcal{A} a la intersección de todos los anillos que contienen a \mathcal{C} . Entonces \mathcal{A} es un anillo. Más aún, \mathcal{A} es el anillo más pequeño entre todos los anillos que contienen a \mathcal{C} . Es decir, si \mathcal{B} es un anillo sobre X y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

5 Definición (el anillo generado por un conjunto de conjuntos). Sea $\mathcal{C} \subseteq 2^X$. Entonces la intersección de todos los anillos que contienen a \mathcal{C} se llama el *anillo generado por \mathcal{C}* .

6 Ejercicio. Sea X un conjunto. Demostrar que 2^X es una álgebra (en particular, un anillo) sobre X .

7 Ejercicio (semianillo de conjuntos, repaso). Repasar la definición de semianillo de conjuntos.

8 Ejercicio. Sea \mathcal{A} un anillo. Demostrar que \mathcal{A} es un semianillo.

9 Teorema (descripción del anillo generado por un semianillo). *Sea \mathcal{S} un semianillo sobre X . Denotemos por \mathcal{A} al conjunto de todos los subconjuntos de X que se pueden escribir como uniones finitas disjuntas de elementos de \mathcal{S} :*

$$\mathcal{A} := \left\{ B \subseteq X : \exists k \in \{1, 2, \dots\} \exists P_1, \dots, P_k \in \mathcal{S} \text{ disj. y tales que } B = \bigcup_{i=1}^k P_i \right\}.$$

Entonces \mathcal{A} es el anillo generado por \mathcal{S} .

Demostración. Pasos principales de la demostración:

1. Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.
2. Si $m \in \{1, 2, \dots\}$ y $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ son disjuntos a pares, entonces $\bigcup_{i=1}^m A_i \in \mathcal{A}$.
3. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$.
4. Si $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$ y $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcap_{i=1}^m A_i \in \mathcal{A}$.
5. Si $P, Q \in \mathcal{S}$, entonces $P \setminus Q \in \mathcal{A}$.
6. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$.
7. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.
8. Si un anillo \mathcal{B} contiene a \mathcal{S} , entonces contiene a \mathcal{A} . □