Anillos de conjuntos y algebras de conjuntos (un tema de análisis real)

Egor Maximenko, Luis Angel González Serrano

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

1 de noviembre de 2026

Objetivos.

- Definir anillos y álgebras de conjuntos.
- Demostrar que la intersección de anillos es un anillo.
- Definir el anillo generado por una colección de conjuntos.
- Describir de manera explícita el anillo generado por un semianillo.

Prerrequisitos.

- Operaciones con conjuntos.
- Semianillos de conjuntos.
- σ-álgebras de conjuntos.
- Propiedades de particiones de conjuntos.

Anillo de conjuntos

Definición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Se dice que $\mathcal{A}$ es anillo de conjuntos sobre X, si:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cup B \in \mathcal{A}$;

3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \setminus B \in \mathcal{A}$.

En vez de "anillo de conjuntos sobre X",

se dice brevemente "anillo de conjuntos" o "anillo".

Ejemplo trivial: el conjunto potencia

Sea X un conjunto.

Entonces, $\mathcal{P}(X)$ es un anillo sobre X.

Ejemplo de un anillo

Sea X un conjunto.

$\mathcal{A} :=$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de X.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo sobre X.

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X.

Entonces, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la intersección de dos conjuntos y la diferencia simétrica de dos conjuntos:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A};$$

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \triangle B \in \mathcal{A}.$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X.
Entonces, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la intersección de dos conjuntos
y la diferencia simétrica de dos conjuntos:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A};$$
$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \triangle B \in \mathcal{A}.$$

Idea de demostración.

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X.
Entonces, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la intersección de dos conjuntos
y la diferencia simétrica de dos conjuntos:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A};$$
$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \triangle B \in \mathcal{A}.$$

Idea de demostración.

$A \cap B$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X.
Entonces, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la intersección de dos conjuntos
y la diferencia simétrica de dos conjuntos:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A};$$
$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \triangle B \in \mathcal{A}.$$

Idea de demostración.

$$A \cap B =$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X.
Entonces, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la intersección de dos conjuntos
y la diferencia simétrica de dos conjuntos:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A};$$
$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \triangle B \in \mathcal{A}.$$

Idea de demostración.

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B),$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X.
Entonces, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la intersección de dos conjuntos
y la diferencia simétrica de dos conjuntos:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A};$$
$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \triangle B \in \mathcal{A}.$$

Idea de demostración.

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B), \qquad A \triangle B$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X.
Entonces, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la intersección de dos conjuntos
y la diferencia simétrica de dos conjuntos:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A};$$
$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \triangle B \in \mathcal{A}.$$

Idea de demostración.

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B), \qquad A \triangle B =$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos sobre X.
Entonces, $\mathcal{A}$ es cerrado bajo la intersección de dos conjuntos
y la diferencia simétrica de dos conjuntos:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cap B \in \mathcal{A};$$
$$\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \triangle B \in \mathcal{A}.$$

Idea de demostración.

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B), \qquad A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$;

3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$;

3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

Idea de demostración.

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$;

3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

Idea de demostración.

$$A \cup B$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$;

3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

Idea de demostración.

$$A \cup B =$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$;

3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

Idea de demostración.

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B),$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$;

3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

Idea de demostración.

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B), \qquad A \setminus B$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$;

3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

Idea de demostración.

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B), \qquad A \setminus B =$$

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \triangle B \in \mathcal{A}$;

3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Entonces, $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

Idea de demostración.

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B), \qquad A \setminus B = A \triangle (A \cap B).$$

$\mathcal{P}(X)$ con la operación binaria $\cup$ no es un grupo

Sea X un conjunto.

Consideremos $\cup$ como una operación binaria en $\mathcal{P}(X)$.

$\mathcal{P}(X)$ con la operación binaria $\cup$ no es un grupo

Sea X un conjunto.

Consideremos $\cup$ como una operación binaria en $\mathcal{P}(X)$.

Sabemos que $\cup$ es asociativa y conmutativa.

$\mathcal{P}(X)$ con la operación binaria $\cup$ no es un grupo

Sea X un conjunto.

Consideremos $\cup$ como una operación binaria en $\mathcal{P}(X)$.

Sabemos que $\cup$ es asociativa y conmutativa.

Notemos que el conjunto vacío $\emptyset$ es un elemento neutro para $\cup$:

$$\forall A \in \mathcal{P}(X) \qquad A \cup \emptyset = A.$$

$\mathcal{P}(X)$ con la operación binaria $\cup$ no es un grupo

Sea X un conjunto.

Consideremos $\cup$ como una operación binaria en $\mathcal{P}(X)$.

Sabemos que $\cup$ es asociativa y conmutativa.

Notemos que el conjunto vacío $\emptyset$ es un elemento neutro para $\cup$:

$$\forall A \in \mathcal{P}(X) \qquad A \cup \emptyset = A.$$

Mostrar que si $A \neq \emptyset$, entonces no existe $B \in \mathcal{P}(X)$ tal que

$$A \cup B = \emptyset.$$

Repaso: operación xor y la diferencia simétrica

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ejercicio

Demostrar que

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \Big\{x\colon \quad (x \in A) \oplus (x \in B)\Big\}.$$

$\mathcal{P}(X)$ con la operación $\triangle$ es un grupo

1. Demostrar que $\triangle$ es asociativa:

$$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(X) \qquad (A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

2. Demostrar que $\triangle$ es conmutativa:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X) \qquad A \triangle B = B \triangle C.$$

3. Demostrar que $\emptyset$ es un elemento neutro para $\triangle$:

$$\forall A \in \mathcal{P}(X) \qquad A \triangle \emptyset = A.$$

4. Dado A en $\mathcal{P}(X)$, encontrar B en $\mathcal{P}(X)$ tal que $A \triangle B = \emptyset$.

$\mathcal{P}(X)$ con las operaciones $\triangle$ y $\cap$ es un anillo en el sentido de álgebra moderna

1. Demostrar la ley distributiva:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

2. Demostrar que $\cap$ es asociativa y conmutativa.
3. Demostrar que X es un elemento neutro para $\cap$.

Álgebra de conjuntos

Definición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Se dice que $\mathcal{A}$ es un **álgebra de conjuntos** sobre X,

si $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos y $X \in \mathcal{A}$.

Álgebra de conjuntos, otra descripción equivalente

Ejercicio

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Demuestre que $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos sobre X

si, y solo si, $\mathcal{A}$ tiene las siguientes propiedades:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
2) $\forall A \in \mathcal{A} \quad X \setminus A \in \mathcal{A}$,
3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cup B \in \mathcal{A}$.

Álgebra de conjuntos, otra descripción equivalente

Ejercicio

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Demuestre que $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos sobre X

si, y solo si, $\mathcal{A}$ tiene las siguientes propiedades:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

2) $\forall A \in \mathcal{A} \quad X \setminus A \in \mathcal{A}$,

3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cup B \in \mathcal{A}$.

En otras palabras,

en vez de pedir que $\mathcal{A}$ sea cerrada bajo la diferencia y tenga elemento X,

se puede pedir que $\mathcal{A}$ sea cerrada bajo los complementos respecto a X.

Ejemplo de una colección que no es anillo

Sean $X = \{0, 1, 2\}$,

$$\mathcal{A} \coloneqq \Big\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}\Big\}.$$

Muestre que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo $\cup$ y $\cap$, pero no es anillo.

Relación de anillos con otras estructuras

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. Demuestre que si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra sobre X,
   entonces $\mathcal{A}$ es un álgebra sobre X y, en particular, un anillo.

2. Demuestre que si $\mathcal{A}$ es un anillo, entonces $\mathcal{A}$ es un semianillo.

Intersección de anillos es un anillo

Proposición

Sea X un conjunto y sea Φ un conjunto de anillos sobre X.

Consideremos la intersección de todos los elementos de Φ:

$$\mathcal{R} := \bigcap \Phi, \qquad \text{esto es,} \qquad \mathcal{R} = \bigcap_{\mathcal{A} \in \Phi} \mathcal{A},$$

esto es,

$$\mathcal{R} = \Big\{ B \subseteq X : \quad \forall \mathcal{A} \in \Phi \quad B \in \mathcal{A} \Big\}.$$

Entonces, $\mathcal{R}$ es un anillo.

Demostración: ejercicio.