El anillo de conjuntos generado por un semianillo de conjuntos (un tema de análisis real)

Egor Maximenko, Luis Angel González Serrano

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

1 de noviembre de 2026

Objetivo

Describir de manera explícita el anillo generado por un semianillo.

Prerrequisitos

- Anillos de conjuntos.
- Semianillos de conjuntos.
- Propiedades de particiones de conjuntos.

Anillo de conjuntos, repaso

Definición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Se dice que $\mathcal{A}$ es anillo de conjuntos sobre X, si:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cup B \in \mathcal{A}$;
3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Cuando X está fijo, decimos simplemente "anillo de conjuntos".

Ejemplo trivial: el conjunto potencia

Sea X un conjunto.

Entonces, $\mathcal{P}(X)$ es un anillo sobre X.

Álgebra de conjuntos

Definición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Se dice que $\mathcal{A}$ es un **álgebra de conjuntos** sobre X,

si $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos y $X \in \mathcal{A}$.

Álgebra de conjuntos, otra descripción equivalente

Ejercicio

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Demuestre que $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos sobre X

si, y solo si, $\mathcal{A}$ tiene las siguientes propiedades:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
2) $\forall A \in \mathcal{A} \quad X \setminus A \in \mathcal{A}$,
3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cup B \in \mathcal{A}$.

Álgebra de conjuntos, otra descripción equivalente

Ejercicio

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Demuestre que $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos sobre X

si, y solo si, $\mathcal{A}$ tiene las siguientes propiedades:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
2) $\forall A \in \mathcal{A} \quad X \setminus A \in \mathcal{A}$,
3) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cup B \in \mathcal{A}$.

En otras palabras,

en vez de pedir que $\mathcal{A}$ sea cerrada bajo la diferencia y tenga elemento X,

se puede pedir que $\mathcal{A}$ sea cerrada bajo los complementos respecto a X.

Intersección de anillos es un anillo

Proposición

Sea X un conjunto y sea Φ un conjunto de anillos sobre X.

Consideremos la intersección de todos los elementos de Φ:

$$\mathcal{R} := \bigcap \Phi, \qquad \text{esto es,} \qquad \mathcal{R} = \bigcap_{\mathcal{A} \in \Phi} \mathcal{A},$$

esto es,

$$\mathcal{R} = \Big\{ B \subseteq X : \quad \forall \mathcal{A} \in \Phi \quad B \in \mathcal{A} \Big\}.$$

Entonces, $\mathcal{R}$ es un anillo.

Demostracion: ejercicio.

El anillo generado por una colección de conjuntos

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

El anillo generado por una colección de conjuntos

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Consideremos el conjunto de todos los anillos que contienen a $\mathcal{C}$:

$$\Phi := \Big\{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \colon \quad \mathcal{A} \text{ es un anillo} \quad \wedge \quad \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \Big\}.$$

Sea $\mathcal{R}$ la intersección de todos los anillos que contienen a $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{R} := \bigcap \Phi, \quad \text{esto es,} \quad \mathcal{R} = \bigcap_{\mathcal{A} \in \Phi} \mathcal{A}.$$

Entonces, por la proposición anterior, $\mathcal{R}$ es un anillo. Obviamente, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}$.
Por lo tanto, $\mathcal{R} \in \Phi$.
Por ser la intersección de Φ, $\mathcal{R}$ es el elemento mínimo de Φ.

El anillo generado por una colección de conjuntos

Definición

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Consideremos el conjunto de todos los anillos que contienen a $\mathcal{C}$:

$$\Phi := \Big\{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) : \quad \mathcal{A} \text{ es un anillo} \quad \wedge \quad \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \Big\}.$$

Sea

$$\mathcal{R} := \bigcap \Phi.$$

$\mathcal{R}$ se llama el anillo generado por $\mathcal{C}$.

Ejemplo

Sea X un conjunto.

Consideremos las siguientes colecciones de subconjuntos de X:

$$\mathcal{C} := \{\emptyset\} \cup \Big\{ Y \subseteq X : \ \exists a \in X \quad Y = \{a\} \Big\},$$

$$\mathcal{A} := \Big\{ Y \subseteq X : \quad Y \text{ es finito} \Big\}.$$

Demuestre que $\mathcal{A}$ es el anillo generado por $\mathcal{C}$.

Descripción del anillo generado por un semianillo

Teorema

Sea $\mathcal{S}$ un semianillo sobre X.

Denotemos por $\mathcal{A}$ al conjunto de todos los subconjuntos de X que se pueden escribir como uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{A} := \Bigg\{ B \in \mathcal{P}(X) \colon \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \exists P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{S} \\ P_1, \ldots, P_m \quad \text{son disjuntos a pares} \quad \wedge \quad B = \bigcup_{k=1}^{m} P_k \Bigg\}.$$

Entonces, $\mathcal{A}$ es el anillo generado por $\mathcal{S}$.

Plan de demostración

1. Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.
2. Si $r \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{A}$ y $A_1, \ldots, A_r$ son disjuntos a pares, entonces $\bigcup_{j=1}^{r} A_j \in \mathcal{A}$.
3. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$.
4. Si $r \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcap_{j=1}^{r} A_j \in \mathcal{A}$.
5. Si $P, Q \in \mathcal{S}$, entonces $P \setminus Q \in \mathcal{A}$.
6. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$.
7. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.
8. $\mathcal{A}$ es un anillo sobre X.
9. Si $\mathcal{H}$ es un anillo sobre X tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$.