

Representación de funcionales lineales acotados en espacios de Hilbert (teorema de Fréchet–Riesz)

Agradezco a varios estudiantes y colegas que me ayudaron a mejorar la explicación de este tema: Roberto Moisés Barrera Castelán, Iris Paola Lozano Vite.

1 Proposición. Sea H un espacio de Hilbert y sea $a \in H$. Definimos $\varphi_a: H \rightarrow \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\varphi_a(x) := \langle x, a \rangle.$$

Entonces, $\varphi_a \in H^*$ y $\|\varphi_a\| = \|a\|$. Más aún,

$$a \in (\ker(\varphi_a))^\perp, \quad \varphi_a(a) = \|a\|^2. \quad (1)$$

Demostración. Demostración: ejercicio simple. □

2 Observación. Algunos autores utilizan la notación a^* en vez de φ_a . Algunos autores utilizan la notación “bra” de Dirac: $\langle a|$, si el producto interno se denota por $\langle \cdot | \cdot \rangle$ y es lineal respecto al segundo argumento.

3 Lema. Sean $\psi \in H^*$ y $a \in H$ tales que

$$a \in (\ker(\psi))^\perp, \quad \psi(a) = \|a\|^2.$$

Entonces, $\psi = \varphi_a$.

Demostración. Sea $x \in H$. Pongamos

$$\lambda := \frac{\psi(x)}{\psi(a)}.$$

Entonces,

$$\psi(x - \lambda a) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\psi(a)}\psi(a) = 0,$$

así que $x - \lambda a \in S$. Luego, como $a \in S^\perp$, obtenemos

$$\langle x - \lambda a, a \rangle = 0.$$

Por lo tanto,

$$0 = \langle x - \lambda a, a \rangle = \langle x, a \rangle - \lambda \|a\|^2 = \langle x, a \rangle - \lambda \psi(a) = \langle x, a \rangle - \psi(x) = \varphi_a(x) - \psi(x).$$

Concluimos que $\psi(x) = \varphi_a(x)$. □

4 Observación. En la situación del Lema 3,

$$H = \ker(\psi) \oplus (\mathbb{C}a).$$

En efecto, en la demostración del Lema 3 obtuvimos la descomposición $(x - \lambda a) + \lambda a$.

5 Lema. *Sea H un espacio de Hilbert y sea S un subespacio cerrado de H tal que $S \neq H$. Entonces, existe h en H tal que $h \in S^\perp$ y $\|h\| = 1$.*

Primera demostración. Sea $v \in H \setminus S$. Usando el teorema sobre la descomposición ortogonal, descomponemos v en la suma $v = u + w$, donde $u \in S$, $w \in S^\perp$. Como $v \notin S$, tenemos que $w \neq 0_H$. Definimos h como

$$h := \frac{1}{\|w\|} w.$$

Luego $\|h\| = 1$. Como S^\perp es un subespacio de H , tenemos que $h \in S^\perp$. □

Segunda demostración. Por el teorema de sobre la descomposición ortogonal, $H = S \oplus S^\perp$. En particular, $H = S + S^\perp$. Si $S^\perp = \{0_H\}$, entonces $H = S$, lo que contradice a la suposición. Por lo tanto, $S^\perp \neq \{0_H\}$. Elegimos $v \in S^\perp \setminus \{0_H\}$. Definimos $h := v/\|v\|$, como en la primera demostración. □

6 Teorema (teorema de Fréchet–Riesz sobre la representación de los funcionales lineales acotados en un espacio de Hilbert). *Sea H un espacio de Hilbert y sea $\psi \in H^*$. Entonces, existe un único vector a en H tal que*

$$\forall x \in H \quad \psi(x) = \langle x, a \rangle.$$

Demostración. Unicidad. Si $a, b \in H$ y $\psi(x) = \langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle$ para cada x en H , entonces $a - b \in H^\perp = \{0_H\}$ y $a = b$.

Existencia. Si ψ es el funcional cero, es decir, $\psi = 0_{H^*}$, entonces ponemos $a = 0_H$.

Consideremos el caso $\psi \neq 0_{H^*}$. Denotemos $\ker(\psi)$ por S . Como ψ es un funcional lineal acotado, S es un subespacio cerrado de H . Como $\psi \neq 0_{H^*}$, $S \neq H$. Aplicamos el Lema 5 y encontramos h en S^\perp tal que $\|h\| = 1$. Construimos el vector a como el siguiente múltiplo del vector h :

$$a := \overline{\psi(h)} h.$$

Entonces, $a \in S^\perp$ y

$$\psi(a) = |\psi(h)|^2 = \|a\|^2.$$

Por el Lema 3, $\psi = \varphi_a$. □

La parte más interesante en el Teorema 6 es la existencia del vector a en el caso cuando el funcional ψ es distinto de cero. Nosotros dividimos la demostración de esta parte en los Lemas 5 y 3, por eso la demostración del teorema salió tan breve.

7 Corolario (sobre la correspondencia canónica entre el espacio de Hilbert y su dual). *Sea H un espacio de Hilbert. Definimos $\Phi: H \rightarrow H^*$ mediante la regla $\Phi(a) := \varphi_a$. Entonces la función Φ es biyectiva, adivita, lineal conjugada e isométrica.*

Demostración. La mayoría de las afirmaciones ya está demostrada. En particular, la propiedad biyectiva de Φ es el Teorema 6. Se deja como ejercicio la demostración de la propiedad lineal conjugada de Φ :

$$\Phi(\xi a + b) = \bar{\xi}\Phi(a) + \Phi(b) \quad (a, b \in H, \xi \in \mathbb{C}). \quad \square$$

8 Problema (sobre el bidual del espacio de Hilbert). *Sea H un espacio de Hilbert. Definimos $\Lambda: H \rightarrow H^{**}$ mediante la regla*

$$\Lambda(a)(\psi) := \psi(a).$$

Demostrar que Λ es un isomorfismo isométrico. Sugerencias. Ya sabemos que en cualquier espacio normado la función Λ es una isometría lineal. Falta mostrar que Λ es suprayectiva. Se recomienda el siguiente plan.

- Mostrar que la función $\langle \varphi_a, \varphi_b \rangle_{H^*} := \langle b, a \rangle$ es un producto interno en H^* .
- Mostrar que la norma inducida por el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^*}$ es la norma estándar en el espacio dual H^* .
- Mostrar que H^* es un espacio de Hilbert.
- Dado un elemento g de H^{**} , aplicar el teorema de Fréchet–Riesz al espacio H^* y encontrar ψ en H^* tal que

$$\forall \xi \in H^* \quad g(\xi) = \langle \xi, \psi \rangle_{H^*}.$$

- Aplicar el teorema de Fréchet–Riesz en el espacio H y encontrar a en H tal que $g = \Lambda(a)$.