Funciones reales medibles

Objetivos. Estudiar funciones medibles con valores reales.

Requisitos. σ-álgebras, la preimagen de un conjunto bajo una función, funciones medibles con valores en un espacio topológico, la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ está generada por los rayos derechos; la σ-álgebra de Borel de $\overline{\mathbb{R}}$ está generada por los rayos derechos, todo conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$ es una unión numerable de rectángulos abiertos.

Medibilidad de funciones con valores reales

1 Proposición (la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ está generada por los rayos derechos, repaso)**.** *La σ-álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está generada por $\{(a,+\infty)\colon a \in \mathbb{R}\}$.*

2 Proposición (criterio de medibilidad de una función real)**.** *Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f es $\mathcal{F}$-medible.

(b) para todo $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}[(a,+\infty)] \in \mathcal{F}$.

3 Proposición (la σ-álgebra de Borel de $\overline{\mathbb{R}}$ está generada por los rayos derechos, repaso)**.** *La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ está generada por*

$$\big\{(a,+\infty]\colon a \in \mathbb{R}\big\}.$$

4 Proposición (criterio de medibilidad de una función con valores en el eje extendido)**.** *Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f es $\mathcal{F}$-medible.

(b) para todo a en $\mathbb{R}$, $f^{-1}[(a,+\infty]] \in \mathcal{F}$.

5 Proposición (cada conjunto abierto en el plano es una unión numerable de rectángulos abiertos, repaso)**.** *Sea A un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$, $A \neq \varnothing$. Entonces existe una sucesión de rectángulos abiertos $\big((a_k,b_k)\times(c_k,d_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (a_k,b_k)\times(c_k,d_k).$$

6 Teorema (sobre la composición de dos funciones medibles con una función continua de dos argumentos)**.** *Sea* $(X, \mathcal{F})$ *un espacio medible, sean* $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$*, sea* Y *un espacio topológico y sea* $\Phi \in C(\mathbb{R}^2, Y)$*. Definimos*

$$h\colon X \to Y, \qquad h(x) \coloneqq \Phi(f(x), g(x)),$$

Entonces $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$*.*

Demostración. Sea B un conjunto abierto arbitrario en Y. Tenemos por demostrar que el conjunto $C \coloneqq h^{-1}[B]$ es $\mathcal{F}$-medible.

Pongamos $A \coloneqq \Phi^{-1}[B]$. Como Φ es continua, A es abierto en $\mathbb{R}^2$. Por el lema existe una sucesión de rectángulos $\big((a_n, b_n) \times (c_n, d_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) \times (c_n, d_n).$$

Consideremos el conjunto C:

$$\begin{aligned}
C &= \Big\{x \in X\colon \Phi(f(x), g(x)) \in B\Big\} \\
&= \Big\{x \in X\colon (f(x), g(x)) \in \Phi^{-1}[B]\Big\} = \Big\{x \in X\colon (f(x), g(x)) \in A\Big\} \\
&= \Big\{x \in X\colon (f(x), g(x)) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)\Big\} \\
&= \Big\{x \in X\colon\ \exists n \in \mathbb{N}\ (f(x), g(x)) \in (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)\Big\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{x \in X\colon (f(x), g(x)) \in (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)\Big\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{x \in X\colon\ f(x) \in (a_n, b_n)\ \wedge g(x) \in (c_n, d_n)\Big\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(f^{-1}[(a_n, b_n)] \cap g^{-1}[(c_n, d_n)]\Big).
\end{aligned}$$

Hemos demostrado que

$$C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(f^{-1}[(a_n, b_n)] \cap g^{-1}[(c_n, d_n)]\Big). \tag{1}$$

Las funciones f y g son $\mathcal{F}$-medibles y los conjuntos (a_n, b_n), (c_n, d_n) son de Borel, por lo tanto sus preimágenes son $\mathcal{F}$-medibles:

$$f^{-1}[(a_n, b_n)] \in \mathcal{F}, \quad g^{-1}[(c_n, d_n)] \in \mathcal{F}.$$

Ahora de la representación (1) se sigue que $C \in \mathcal{F}$. $\square$

Operaciones aritméticas con funciones medibles

Suponemos que $(X, \mathcal{F})$ es un espacio medible.

7 Proposición (la continuidad de la adición de números reales)**.** *Sea* $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(u, v) \coloneqq u + v$. *Entonces* $\Phi \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

8 Proposición (la continuidad de la multiplicación de números reales)**.** *Sea* $\Psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Psi(u, v) \coloneqq uv$. *Entonces* $\Psi \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

9 Ejercicio. Demostrar las dos proposiciones anteriores. Indicación. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Hay que construir $\delta > 0$ tal que para cualesquiera x, y en $\mathbb{R}$ con

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta,$$

se cumpla la desigualdad $|xy - ab| < \varepsilon$.

10 Proposición (la suma y el producto de dos funciones reales medibles son medibles)**.** *Sean* $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. *Entonces* $f + g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ *y* $fg \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$.

Demostración. Aplicar el Teorema 6 con $\Phi(u, v) \coloneqq u + v$, luego con $\Phi(u, v) \coloneqq uv$. □

El supremo y el ínfimo de funciones medibles

11 Proposición (el supremo de una sucesión de funciones medibles)**.** *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. *Definimos* $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$g(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \qquad (x \in X).$$

Entonces $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$.

Idea de la demostración. Para todo a en $\mathbb{R}$ y todo x en X,

$$g(x) > a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) > a.$$

Por lo tanto,

$$g^{-1}[(a, +\infty]] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}[(a, +\infty]].$$ □

12 Ejercicio. Enunciar y demostrar una proposición similar para el ínfimo de una sucesión de funciones medibles.

13 Corolario (el máximo y el mínimo de dos funciones medibles)**.** *Sean* $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *funciones* $\mathcal{F}$*-medibles. Entonces las funciones* $u, v\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$*, definidas como*

$$u(x) \coloneqq \max\{f(x), g(x)\}, \qquad v(x) \coloneqq \min\{f(x), g(x)\},$$

son $\mathcal{F}$*-medibles.*

14 Corolario (la parte positiva y parte negativa de una función medible)**.** *Sea* $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. *Entonces* $f_+, f_- \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.

Límites de funciones medibles

15 Proposición (el límite superior y límite inferior de una sucesión de funciones medibles)**.** *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\overline{\mathbb{R}})$*. Entonces las funciones* g *y* h *definidas mediante*

$$g(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x), \qquad h(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in X)$$

también son $\mathcal{F}$*-medibles.*

16 Corolario (el límite puntual de una sucesión de funciones medibles es medible)**.** *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones* $\mathcal{F}$*-medibles reales. Supongamos que para todo* $x \in X$ *existe* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$*. Lo denotemos por* $g(x)$*. Entonces la función* g *es* $\mathcal{F}$*-medible.*