Espacio cociente de un espacio normado

1 Proposición (relación de equivalencia inducida por un subespacio)**.** *Sea V un espacio vectorial y sea W un subespacio de V. Entonces la siguiente relación binaria es una relación de equivalencia:*

$$x \sim y \qquad \Longrightarrow \qquad x - y \in W.$$

2 Proposición (las operaciones lineales y la relación de equivalencia)**.** *Sea V un espacio vectorial y sea W un subespacio de V. Definimos $\sim$ como en la proposición anterior. Entonces las operaciones lineales son congruentes con $\sim$, en el sentido que si $x_1 \sim x_2$, $y_1 \sim y_2$, entonces $x_1 + y_1 \sim x_2 + y_2$, y $\lambda x_1 \sim \lambda x_2$.*

3 Definición. Sea V un espacio vectorial y sea W un subespacio de V. El espacio cociente V/W se define como el conjunto de las clases de equivalencia respecto a la relación definida en la Proposición 1. Las operaciones vectoriales en V/W se definen mediante representantes:

$$(x + W) + (y + W) \coloneqq (x + y) + W, \qquad \lambda(x + W) \coloneqq (\lambda x) + W.$$

Por la Proposición 2, esta definición es consistente.

4 Proposición (espacio cociente de un espacio normado)**.** *Sea V un espacio normado y sea W un subespacio cerrado de V. Entonces la función, definida mediante la siguiente fórmula, es una norma en V/W:*

$$\|A\|_{V/W} \coloneqq \inf_{x \in A} \|x\|_V.$$

La función $\pi\colon V \to V/W$, $\pi(x) \coloneqq x + W$, es continua.

Demostración. Demostremos la propiedad subaditiva de $\|\cdot\|_{V/W}$. Sean $A_1, A_2 \in V/W$. Entonces para cualesquiera u en A_1 y v en A_2 tenemos $u + v \in A_1 + A_2$, luego

$$\|A_1 + A_2\|_{V/W} \le \|u + v\|_V \le \|u\|_V + \|v\|_V.$$

Pasando al ínfimo sobre u en A_1 y v en A_2, obtenemos $\|A_1 + A_2\|_{V/W} \le \|A_1\|_{V/W} + \|A_2\|_{V/W}$.

La continuidad de π se sigue de la desigualdad $\|\pi(x)\|_{V/W} \le \|x\|_V$. $\square$

5 Proposición (espacio cociente de un espacio de Banach)**.** *Sea V un espacio de Banach y sea W un subespacio cerrado de V. Entonces V/W es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V/W tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|A_k\| < +\infty.$$

Usando la definición de la norma en V/W, para cada k en $\mathbb{N}$ encontramos x_k en A_k tal que $\|x_k\| \le \|A_k\|_{V/W} + 2^{-k}$. Entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \|A_k\|_{V/W} + \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} < +\infty.$$

Como V es de Banach, la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k$ converge a un vector que denotemos por y. Luego para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos que $\sum_{k=1}^n x_k - y$ es un elemento de la clase $\sum_{k=1}^n A_k - (y+W)$, así que

$$\left\| \sum_{k=1}^n A_k - (y+W) \right\|_{V/W} \le \left\| \sum_{k=1}^n x_k - y \right\|.$$

Esto implica que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n A_k = y + W$. □