Álgebra cociente de un álgebra de Banach

Recordemos que si V es un espacio de Banach complejo y W es un subespacio cerrado de V, entonces la relación binaria

$$a \overset{W}{\sim} b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a - b \in W$$

es una relación de equivalencia, y esta relación es congruente con las operaciones lineales. El espacio de las clases de equivalencia se denota por V/W y consiste de todos los subconjuntos de V de la forma $[a] = a + W$, donde $a \in V$. Este conjunto, dotado de las operaciones vectoriales

$$[a] + [b] \coloneqq [a + b], \qquad \lambda[a] \coloneqq [\lambda a],$$

es un espacio vectorial complejo. Más aún, la función $\|\cdot\|_{V/W}$, definida en V/W mediante la regla

$$\|[a]\|_{V/W} \coloneqq \inf_{b\in[a]} \|b\| = \inf_{w\in W} \|a + w\|,$$

es una norma en V/W, y el espacio V/W es completo.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e y sea J un ideal bilateral cerrado en $\mathcal{A}$. Suponemos que $J \neq \mathcal{A}$, esto es, $e \notin J$.

Definimos la relación de equivalencia $\overset{J}{\sim}$, el espacio cociente $\mathcal{A}/J$ y la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{A}/J}$, usando el hecho que $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach y J es un subespacio cerrado de $\mathcal{A}$.

1 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e y sea J un ideal bilateral cerrado en $\mathcal{A}$, tal que $J \neq \mathcal{A}$. Entonces la relación de equivalencia $\overset{J}{\sim}$ es congruente con la multiplicación en el álgebra $\mathcal{A}$. Al dotar $\mathcal{A}/J$ de la operación de multiplicación*

$$[a]\,[b] \coloneqq [ab], \tag{1}$$

$\mathcal{A}/J$ se convierte en un álgebra de Banach con identidad $e + J$.

Demostración. Sean a_1, a_2, a_3, a_4 en $\mathcal{A}$ tales que $a_1 - a_2 \in J$, $a_3 - a_4 \in J$. Entonces

$$a_1a_3 - a_2a_4 = a_1a_3 - a_1a_4 + a_1a_4 - a_2a_4 = a_1(a_3 - a_4) + (a_1 - a_2)a_4 \in J,$$

así que $a_1a_3 \overset{J}{\sim} a_2a_4$. Por lo tanto, la definición (1) es consistente. Usando esta definición y las propiedades de la multiplicación en $\mathcal{A}$, es fácil verificar que $\mathcal{A}/J$ es un álgebra compleja asociativa con identidad e.

Probemos que la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{A}/J}$ es submultiplicativa. Sean $P, Q \in \mathcal{A}/J$. Dado $\varepsilon > 0$, encontramos a en P y b en Q tales que

$$\|a\|_{\mathcal{A}} \leq \|P\|_{\mathcal{A}/J} + \varepsilon, \qquad \|b\|_{\mathcal{A}} \leq \|Q\|_{\mathcal{A}/J} + \varepsilon.$$

Entonces $ab \in PQ$ y

$$\|PQ\|_{\mathcal{A}/J} \leq \|ab\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}\|b\|_{\mathcal{A}} \leq (\|P\|_{\mathcal{A}/J} + \varepsilon)(\|Q\|_{\mathcal{A}/J} + \varepsilon).$$

Pasando al límite cuando ε tiende a cero, obtenemos que la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{A}/J}$ es submultiplicativa.

Probemos que $\|e + J\|_{\mathcal{A}/J} = 1$. En efecto, como $e \in e + J$,

$$\|e + J\|_{\mathcal{A}/J} \leq \|e\| = 1.$$

Por otro lado, como $e \notin J$, $e+J \neq J$, luego $\|e+J\|_{\mathcal{A}/J}$. Con la propiedad submultiplicativa de la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{A}/J}$ obtenemos

$$\|e + J\|_{\mathcal{A}/J} \geq 1.$$

Hemos mostrado que $\|e + J\|_{\mathcal{A}/J} = 1$. □