La forma cuadrática asociada a la forma sesquilineal (un tema de la unidad “Espacios con producto interno”)

Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

13 de julio de 2022

La definición principal y objetivos del tema

Sea V un espacio vectorial complejo.

La definición principal y objetivos del tema

Sea V un espacio vectorial complejo.

Definición

Dada una función sesquilineal $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$, definimos $q_f\colon V \to \mathbb{C}$,

$$q(x) := f(x, x).$$

La definición principal y objetivos del tema

Sea V un espacio vectorial complejo.

Definición

Dada una función sesquilineal $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$, definimos $q_f\colon V \to \mathbb{C}$,

$$q(x) := f(x, x).$$

Objetivos del tema:

- conocer algunos ejemplos;
- estudiar algunas propiedades elementales de q_f.

Aplicaciones

- Propiedades del producto interno y de la norma asociada al producto interno.
- Propiedades de matrices.
- En particular, propiedades de matrices autoadjuntas ($=$ hermíticas).
- Propiedades de operadores lineales acotados en espacios de Hilbert.
- En particular, propiedades de los operadores autoadjuntos ($=$ hermíticos).

Prerrequisitos

- Formas sesquilineales.

Plan

Ejemplo: la forma cuadrática asociada a una matriz cuadrada

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Definimos $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(x, y) := y^* A x,$$

donde y^* es el vector transpuesto conjugado:

$$y^* = [\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}].$$

Entonces $q_f(x) = x^* A x$. Escribir $q_f(x)$ mediante una suma doble, en términos de las componentes de A y x.

Ejemplo: la forma cuadrática asociada a una matriz diagonal

Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Consideramos la matriz diagonal

$$D := \operatorname{diag}(a) = \left[a_j \delta_{j,k}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Ejemplo: la forma cuadrática asociada a una matriz diagonal

Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Consideramos la matriz diagonal

$$D := \operatorname{diag}(a) = \left[a_j \delta_{j,k}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Le asociamos la forma sesquilineal $f(x, y) := y^* D x$ y luego la forma cuadrática $q_f(x) = x^* D x$.

Ejemplo: la forma cuadrática asociada a una matriz diagonal

Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Consideramos la matriz diagonal

$$D := \operatorname{diag}(a) = \left[a_j \delta_{j,k}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Le asociamos la forma sesquilineal $f(x, y) := y^* D x$ y luego la forma cuadrática $q_f(x) = x^* D x$.

Es fácil ver que en este ejemplo

$$q_f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_j |x_j|^2.$$

Plan

Propiedades elementales de las formas cuadráticas

En las siguientes proposiciones suponemos que $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal.

Propiedades elementales de las formas cuadráticas

En las siguientes proposiciones suponemos que $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal.

Denotamos por q la forma cuadrática asociada a f.

Propiedades elementales de las formas cuadráticas

En las siguientes proposiciones suponemos que $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal.

Denotamos por q la forma cuadrática asociada a f.

Tratamos f como una función fija, por eso usamos la notación simplificada q en vez de la notación más precisa q_f.

La forma cuadrática es absolutamente homogénea de orden 2

Proposición

Para cada a en V y cada λ en $\mathbb{C}$,

$$q(\lambda a) = |\lambda|^2 q(a).$$

La forma cuadrática es absolutamente homogénea de orden 2

Proposición

Para cada a en V y cada λ en $\mathbb{C}$,

$$q(\lambda a) = |\lambda|^2 q(a).$$

Demostración.

$$q(\lambda a)$$

La forma cuadrática es absolutamente homogénea de orden 2

Proposición

Para cada a en V y cada λ en $\mathbb{C}$,

$$q(\lambda a) = |\lambda|^2 q(a).$$

Demostración.

$$q(\lambda a) =$$

La forma cuadrática es absolutamente homogénea de orden 2

Proposición

Para cada a en V y cada λ en $\mathbb{C}$,

$$q(\lambda a) = |\lambda|^2 q(a).$$

Demostración.

$$q(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a)$$

La forma cuadrática es absolutamente homogénea de orden 2

Proposición

Para cada a en V y cada λ en $\mathbb{C}$,

$$q(\lambda a) = |\lambda|^2 q(a).$$

Demostración.

$$q(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) =$$

La forma cuadrática es absolutamente homogénea de orden 2

Proposición

Para cada a en V y cada λ en $\mathbb{C}$,

$$q(\lambda a) = |\lambda|^2 q(a).$$

Demostración.

$$q(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a, a)$$

La forma cuadrática es absolutamente homogénea de orden 2

Proposición

Para cada a en V y cada λ en $\mathbb{C}$,

$$q(\lambda a) = |\lambda|^2 q(a).$$

Demostración.

$$q(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda \overline{\lambda} f(a, a) =$$

La forma cuadrática es absolutamente homogénea de orden 2

Proposición

Para cada a en V y cada λ en $\mathbb{C}$,

$$q(\lambda a) = |\lambda|^2 q(a).$$

Demostración.

$$q(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a, a) = |\lambda|^2\,q(a).$$

La forma cuadrática evaluada en el vector opuesto

Proposición

Para cada a en V,

$$q(-a) = q(a).$$

La forma cuadrática evaluada en el vector opuesto

Proposición

Para cada a en V,
$$q(-a) = q(a).$$

Demostración.

La forma cuadrática evaluada en el vector opuesto

Proposición

Para cada a en V,

$$q(-a) = q(a).$$

Demostración.

Aplicar la proposición anterior con $\lambda = -1$.

La forma cuadrática evaluada en la suma de dos vectores

Proposición

Para cualesquiera a, b en V,

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

La forma cuadrática evaluada en la suma de dos vectores

Proposición

Para cualesquiera a, b en V,

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Demostración.

La forma cuadrática evaluada en la suma de dos vectores

Proposición

Para cualesquiera a, b en V,

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Demostración.

$$q(a+b)$$

La forma cuadrática evaluada en la suma de dos vectores

Proposición

Para cualesquiera a, b en V,

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Demostración.

$$q(a+b) =$$

La forma cuadrática evaluada en la suma de dos vectores

Proposición

Para cualesquiera a, b en V,

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Demostración.

$$q(a+b) = f(a+b, a+b)$$

La forma cuadrática evaluada en la suma de dos vectores

Proposición

Para cualesquiera a, b en V,

$$q(a + b) = q(a) + f(a, b) + f(b, a) + q(b).$$

Demostración.

$$q(a + b) = f(a + b, a + b) =$$

La forma cuadrática evaluada en la suma de dos vectores

Proposición

Para cualesquiera a, b en V,

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Demostración.

$$q(a+b) = f(a+b, a+b) = f(a, a+b) + f(b, a+b)$$

La forma cuadrática evaluada en la suma de dos vectores

Proposición

Para cualesquiera a, b en V,

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Demostración.

$$q(a+b) = f(a+b, a+b) = f(a, a+b) + f(b, a+b)$$

$$=$$

La forma cuadrática evaluada en la suma de dos vectores

Proposición

Para cualesquiera a, b en V,

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} q(a+b) &= f(a+b, a+b) = f(a, a+b) + f(b, a+b) \\ &= f(a,a) + f(a,b) + f(b,a) + f(b,b) \end{aligned}$$

La forma cuadrática evaluada en la suma de dos vectores

Proposición

Para cualesquiera a, b en V,

$$q(a+b) = q(a) + f(a, b) + f(b, a) + q(b).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} q(a+b) &= f(a+b, a+b) = f(a, a+b) + f(b, a+b) \\ &= f(a, a) + f(a, b) + f(b, a) + f(b, b) \\ &= \end{aligned}$$

La forma cuadrática evaluada en la suma de dos vectores

Proposición

Para cualesquiera a, b en V,

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} q(a+b) &= f(a+b, a+b) = f(a, a+b) + f(b, a+b) \\ &= f(a,a) + f(a,b) + f(b,a) + f(b,b) \\ &= q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b). \end{aligned}$$

La identidad de Pitágoras para formas sesquilineales

Proposición

Sean $a, b \in V$ tales que $f(a, b) = 0$ y $f(b, a) = 0$. Entonces

$$q(a + b) = q(a) + q(b).$$

La identidad de Pitágoras para formas sesquilineales

Proposición

Sean $a, b \in V$ tales que $f(a, b) = 0$ y $f(b, a) = 0$. Entonces

$$q(a + b) = q(a) + q(b).$$

Demostración.

La identidad de Pitágoras para formas sesquilineales

Proposición

Sean $a, b \in V$ tales que $f(a, b) = 0$ y $f(b, a) = 0$. Entonces

$$q(a + b) = q(a) + q(b).$$

Demostración. Se sigue de la proposición anterior:

$$q(a + b) = q(a) + \underbrace{f(a, b)}_{=0} + \underbrace{f(b, a)}_{=0} + q(b).$$

La identidad del paralelogramo para las formas sesquilineales

Proposición

Para cualesquiera a, b en V,

$$q(a+b) + q(a-b) = 2(q(a) + q(b)).$$

Demostración de la identidad del paralelogramo

Recordamos la fórmula para $q(a+b)$:

$$q(a+b)$$

Demostración de la identidad del paralelogramo

Recordamos la fórmula para $q(a+b)$:

$$q(a+b) =$$

Demostración de la identidad del paralelogramo

Recordamos la fórmula para $q(a+b)$:

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Demostración de la identidad del paralelogramo

Recordamos la fórmula para $q(a+b)$:

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Sustituimos $-b$ en vez de b:

$$q(a-b)$$

Demostración de la identidad del paralelogramo

Recordamos la fórmula para $q(a+b)$:

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Sustituimos $-b$ en vez de b:

$$q(a-b) =$$

Demostración de la identidad del paralelogramo

Recordamos la fórmula para $q(a+b)$:

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Sustituimos $-b$ en vez de b:

$$q(a-b) = q(a) - f(a,b) - f(b,a) + q(b).$$

Demostración de la identidad del paralelogramo

Recordamos la fórmula para $q(a+b)$:

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Sustituimos $-b$ en vez de b:

$$q(a-b) = q(a) - f(a,b) - f(b,a) + q(b).$$

Finalmente, sumamos estas dos igualdades:

$$q(a+b) + q(a-b)$$

Demostración de la identidad del paralelogramo

Recordamos la fórmula para $q(a+b)$:

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Sustituimos $-b$ en vez de b:

$$q(a-b) = q(a) - f(a,b) - f(b,a) + q(b).$$

Finalmente, sumamos estas dos igualdades:

$$q(a+b) + q(a-b) =$$

Demostración de la identidad del paralelogramo

Recordamos la fórmula para $q(a+b)$:

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Sustituimos $-b$ en vez de b:

$$q(a-b) = q(a) - f(a,b) - f(b,a) + q(b).$$

Finalmente, sumamos estas dos igualdades:

$$q(a+b) + q(a-b) = 2q(a) + 2q(b).$$

Ejemplo de función que no es forma cuadrática

Definimos $h\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$,

$$h(x) := x_1^3 + x_2^2.$$

Ejemplo de función que no es forma cuadrática

Definimos $h\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$,

$$h(x) := x_1^3 + x_2^2.$$

- Encontrar x, y en $\mathbb{C}^2$ tales que

$$h(x+y) + h(x-y) \neq 2(h(x) + h(y)).$$

Ejemplo de función que no es forma cuadrática

Definimos $h\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$,

$$h(x) := x_1^3 + x_2^2.$$

- Encontrar x, y en $\mathbb{C}^2$ tales que

$$h(x+y) + h(x-y) \neq 2(h(x) + h(y)).$$

- Encontrar x en $\mathbb{C}^2$ y λ en $\mathbb{C}$ tales que

$$h(\lambda x) \neq |\lambda|^2 h(x).$$

Ejemplo de función que no es forma cuadrática

Definimos $h\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$,

$$h(x) := x_1^3 + x_2^2.$$

- Encontrar x, y en $\mathbb{C}^2$ tales que

$$h(x+y) + h(x-y) \neq 2(h(x) + h(y)).$$

- Encontrar x en $\mathbb{C}^2$ y λ en $\mathbb{C}$ tales que

$$h(\lambda x) \neq |\lambda|^2 h(x).$$

- Usando alguno de los incisos anteriores mostrar que h no es forma cuadrática.

El espacio vectorial de las formas cuadráticas

Ejercicio. Denotemos por F al conjunto de las formas sesquilineales.
Demostrar que F es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^{V^2}$.

El espacio vectorial de las formas cuadráticas

Ejercicio. Denotemos por F al conjunto de las formas sesquilineales.
Demostrar que F es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^{V^2}$.

Denotemos por Q al conjunto de las funciones $V \to \mathbb{C}$ que se pueden representar como formas cuadráticas:

$$Q := \{g \in \mathbb{C}^V : \quad \exists f \in F \quad g = q_f\}.$$

Demostrar que Q es un espacio vectorial.