La forma cuadrática asociada a la forma sesquilineal

Objetivos. Dada una función sesquilineal $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$, consideremos la función q que se obtiene al evaluar f en la “diagonal” del dominio (es decir, cuando igualamos los dos argumentos):

$$q(x) \coloneqq f(x,x).$$

Vamos a estudiar algunas propiedades elementales de q y demostrar que f se expresa a través de q.

Prerrequisitos. Formas sesquilineales (= funciones sesquilineales).

1 Definición. Sea H un espacio vectorial complejo y sea $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. La *forma cuadrática* asociada a f se define como $q_f\colon H \to \mathbb{C}$,

$$q_f(x) \coloneqq f(x,x) \qquad (x \in H).$$

2 Ejemplo (la forma cuadrática asociada a una matriz cuadrada)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Definimos $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$,

$$f(x,y) \coloneqq y^* A x,$$

donde y^* es el vector transpuesto conjugado:

$$y^* = \big[\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}\big].$$

Entonces $q_f(x) = x^* A x$. Escribir $q_f(x)$ mediante una suma doble, en términos de las componentes de A y x.

En las siguientes proposiciones suponemos que H es un espacio vectorial complejo, $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal y $q\colon H \to \mathbb{C}$ es la forma cuadrática asociada a f. Tratamos f como una función fija, por eso usamos la notación simplificada q en vez de la notación más precisa q_f.

3 Proposición (la forma cuadrática es absolutamente homogénea de orden 2)**.** *Para cada a en H y cada λ en $\mathbb{C}$,*

$$q(\lambda a) = |\lambda|^2 q(a).$$

Demostración. Escribimos q en términos de f, luego aplicamos la propiedad homogénea respecto al primer argumento y la propiedad homogénea conjugada respecto al segundo argumento:

$$q(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a,a) = |\lambda|^2\,q(a). \qquad \square$$

4 Proposición (la forma cuadrática evaluada en el vector opuesto)**.** *Para cada a en H,*

$$q(-a) = q(a).$$

Demostración. Es un caso particular de la Proposición 3. $\square$

5 Proposición (la forma cuadrática evaluada en la suma de dos vectores)**.** *Para cualesquiera a, b en H,*

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b). \tag{1}$$

Demostración. Escribimos q en términos de f, luego aplicamos la propiedad aditiva de f respecto al primer y segundo argumento:

$$\begin{aligned} q(a+b) &= f(a+b, a+b) = f(a, a+b) + f(b, a+b) \\ &= f(a,a) + f(a,b) + f(b,a) + f(b,b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b). \end{aligned}$$ $\square$

6 Proposición (la identidad de Pitágoras para formas sesquilineales)**.** *Sean $a, b \in H$ tales que $f(a,b) = 0$ y $f(b,a) = 0$. Entonces*

$$q(a+b) = q(a) + q(b).$$

Demostración. Se sigue de la Proposición 5. $\square$

7 Proposición (la identidad de paralelogramo para las formas sesquilineales)**.** *Para cualesquiera a, b en H,*

$$q(a+b) + q(a-b) = 2(q(a) + q(b)). \tag{2}$$

Demostración. Recordemos la identidad (1):

$$q(a+b) = q(a) + f(a,b) + f(b,a) + q(b).$$

Sustituimos $-b$ en vez de b:

$$q(a-b) = q(a) - f(a,b) - f(b,a) + q(b).$$

Al sumar estas dos igualdades obtenemos (3). $\square$

8 Lema. *Sea $p \in \{0,1,2,3\}$. Entonces*

$$\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^{pk} = \begin{cases} 4, & p = 0; \\ 0, & p \in \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Primera demostración. El cálculo directo para cada p. $\square$

Segunda demostración. Aplicar la fórmula de la suma de la progresión geométrica. $\square$

9 Proposición (la identidad de polarización para las formas sesquilineales)**.** *Sean* $a, b \in H$*. Entonces*

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q(a + \mathrm{i}^k\, b). \tag{3}$$

Demostración. Para cada k en $\{0,1,2,3\}$ tenemos

$$q(a + \mathrm{i}^k\, b) = f(a + \mathrm{i}^k\, b, a + \mathrm{i}^k\, b) = q(a) - \mathrm{i}^k\, f(a,b) + \mathrm{i}^k\, f(b,a) + q(b).$$

Multiplicamos por i^k:

$$\mathrm{i}^k\, q(a + \mathrm{i}^k\, b) = \mathrm{i}^k\, q(a) + f(a,b) + \mathrm{i}^{2k}\, f(b,a) + \mathrm{i}^k\, q(b).$$

Sumamos ambos lados de esta igualded sobre k en $\{0,1,2,3\}$. Aplicando el Lema 8 obtenemos (3). $\square$

Vamos a conocer una generalización de la identidad de polarización que involucra m sumandos ($m \geq 3$) y una raíz primitiva de la unidad de orden m. Dado m en $\mathbb{N}$, usemos la siguiente notación:

$$\varepsilon_m \coloneqq \exp\left(\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{m}\right).$$

10 Ejercicio (las potencias de una raíz primitiva de la unidad)**.** Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, y sea $r \in \mathbb{Z}$. Demostrar que

$$\varepsilon_m^r = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r \in m\mathbb{Z}.$$

La condición $r \in m\mathbb{Z}$ significa que m divide a r.

11 Ejercicio (las sumas de las potencias de una raíz primitiva de la unidad)**.** Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, y sea $p \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_m^{pk} = \begin{cases} m, & p = 0; \\ 0, & p \in \{1, \ldots, m-1\}. \end{cases}$$

12 Ejercicio (la identidad de polarización con m sumandos)**.** Sea $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Denotemos por q la forma cuadrática asociada a f:

$$q(x) \coloneqq f(x,x).$$

Sean $a, b \in H$. Demostrar que

$$f(a,b) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_m^k \, q(a + \varepsilon_m^k b).$$

Criterio de formas sesqulineales hermíticas

13 Proposición. *Sea $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Denotemos por q la forma cuadrática asociada a f. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes.*

(a) $f(b,a) = \overline{f(a,b)}$ para cualesquiera a, b en H;

(b) $q(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en H.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Supongamos que f es hermítica. Entonces para cada u en H obtenemos

$$q(u) = f(u,u) = \overline{f(u,u)} = \overline{q(u)},$$

así que $q(u) \in \mathbb{R}$.

(b)$\Rightarrow$(a). Supongamos que $q(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en H. Sean $a, b \in H$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b,a) = \frac{1}{4} \left(q(b+a) + \mathrm{i}\, q(b + \mathrm{i}\, a) - q(b-a) - \mathrm{i}\, q(b - \mathrm{i}\, a) \right).$$

Factorizamos i de la expresión $b + \mathrm{i}\, a$, -1 de la expresión $b - a$, $-\mathrm{i}$ de la expresión $b - \mathrm{i}\, a$:

$$f(b,a) = \frac{1}{4} \Big(q(a+b) + \mathrm{i}\, q\big(\mathrm{i}(a - \mathrm{i}\, b)\big) - q\big(-(a-b)\big) - \mathrm{i}\, q\big(-\mathrm{i}(a + \mathrm{i}\, b)\big) \Big).$$

Aplicamos la Proposición 3 tomando en cuenta que $|\,\mathrm{i}\,| = |-1| = |-\mathrm{i}\,| = 1$:

$$f(b,a) = \frac{1}{4} \big(q(a+b) + \mathrm{i}\, q(a - \mathrm{i}\, b) - q(a-b) - \mathrm{i}\, q(a + \mathrm{i}\, b) \big).$$

Por otro lado, aplicamos la identidad de polarización a la expresión $f(a,b)$ y sacamos el conjugado usando la suposición que todos los valores de q son reales:

$$\overline{f(a,b)} = \frac{1}{4} \big(q(a+b) - \mathrm{i}\, q(a + \mathrm{i}\, b) - q(a-b) + \mathrm{i}\, q(a - \mathrm{i}\, b) \big).$$

Hemos mostrado que $f(b,a) = \overline{f(a,b)}$. □