Propiedades de conjuntos infinitos

1 Observación. Recordemos que cada número x en $(0,1)$ tiene al menos una representación en la forma

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k},$$

donde $a_k \in \{0,\ldots,9\}$. Notemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}$$

si, y solo si, $a_k = b_k$ para cada k en $\mathbb{N}$, o bien, existe n en $\mathbb{N}$ tal que $a_k = b_k$ para cada $k < n$, $a_n = b_n + 1$, $a_k = 0$ para cada $k \geq n$, $b_k = 9$ para cada $k \geq n$.

Denotemos por A_{10} al conjunto de los elementos de $(0,1)$ que tienen dos representaciones decimales:

$$A_{10} = \left\{ \frac{m}{10^n} \colon \ 0 < m < 10^n \right\}.$$

En particular, si $b_k \in \{1,\ldots,8\}$ para cada k en $\mathbb{N}$ y existe k en $\mathbb{N}$ tal que $a_k \neq b_k$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \neq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}.$$

2 Observación. Si $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$, y $x \in (0,1)$, entonces x se puede escribir como

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{q^k},$$

donde $a_k \in \{0,\ldots,q-1\}$. Los elementos del siguiente conjunto tienen dos representaciones diferentes:

$$A_q \coloneqq \left\{ \frac{m}{q^n} \colon \ 0 < m < q^n \right\}.$$

3 Proposición. *El conjunto $\mathbb{R}$ es no numerable.*

Demostración. Ya sabemos que $\mathbb{R} \sim (0,1)$. Mostremos que $(0,1)$ es no numerable. Razonando por reducción al absurdo, supongamos $f \colon \mathbb{N} \to (0,1)$ es una biyección. Para cada j en $\mathbb{N}$, escribimos $f(j)$ en su representación decimal:

$$f(j) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_{j,k}}{10^k}.$$

Para cada j pongamos

$$b_j := \min(\{1, \ldots, 8\} \setminus \{a_{j,j}\}).$$

Entonces $b_j \in \{1, \ldots, 8\}$ y $b_j \neq a_{j,j}$. Definimos y en $(0, 1)$ mediante la fórmula

$$y = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{b_j}{10^j}.$$

Luego $y \neq f(j)$ para cada j en $\mathbb{N}$, así que la función f no es suprayectiva. □

4 Proposición. *Todo conjunto infinito contiene un subconjunto numerable.*

Demostración. Sea A un conjunto infinito. Construyamos una función inyectiva $f \colon \mathbb{N} \to A$. Apliquemos la inducción matemática. Para $n = 1$, notemos que A no es vacío, y definimos $f(1)$ como algún elemento de A.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y los elementos $f(1), \ldots, f(n)$ ya están definidos. Como el conjunto $f[J_n] = \{f(1), \ldots, f(n)\}$ es finito y el conjunto A es infinito, tenemos que $A \neq f[J_n]$. Definimos $f(n + 1)$ como algún elemento de $A \setminus f[J_n]$.

Por la definición, si $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$, entonces $f(n) \notin f[J_{n-1}]$ y $f(k) \in f[J_{n-1}]$, así que $f(n) \neq f(k)$. Hemos probado que f es inyectiva. Luego $\mathbb{N} \sim f[\mathbb{N}] \subseteq A$. □

5 Proposición. *Sean A un conjunto infinito, B un conjunto a lo sumo numerable. Entonces $A \cup B \sim A$.*

Demostración. Pongamos $C = B \setminus A$. Entonces $A \cup B = A \cup C$. Consideremos el caso cuando $C \sim \mathbb{N}$. El caso cuando C es finito es más fácil y se deja como ejercicio.

Encontremos en A un conjunto numerable X. Partimos X en dos partes numerables, Y y Z. Como $X \sim Y$ y $C \sim Z$,

$$A \cup B = A \cup C = (A \setminus X) \cup X \cup C \sim (A \setminus X) \cup Y \cup Z = (A \setminus X) \cup X = A. \qquad \square$$

6 Ejemplo. El conjunto de los números irracionales es infinito no numerable.

Demostración. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es finito o numerable. Como $\mathbb{Q}$ es infinito, obtenemos $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, lo cual contradice al hecho que $\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$. □

7 Proposición. *Sea X un conjunto infinito. Entonces existe $Y \subsetneq X$ tal que $Y \sim X$.*

Demostración. Encontramos en X un conjunto numerable A y lo dividimos en dos partes disjuntas numerables, B y C. Entonces $B \cup C \sim B$ y por eso

$$X = (X \setminus A) \cup B \cup C \sim (X \setminus A) \cup B = X \setminus C,$$

pero $X \setminus C \subsetneq X$. $\square$

8 Proposición. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim [0, 1)$.

Demostración. Dado un conjunto $M \subseteq \mathbb{N}$, denotemos por 1_M a la función característica de M. Definimos $f \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1)$,

$$f(M) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1_M(k)}{3^k}.$$

Como trabajamos con la expansión ternaria y no usamos la cifra 2, las series con cifras diferentes tienen sumas diferentes. Luego f es inyectiva. Hemos probado que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \prec [0, 1)$.

Por otro lado, denotemos por A_2 al conjunto de los elementos de $[0, 1)$ que tienen dos representaciones binarias:

$$A_2 := \left\{ \frac{p}{2^n} \colon \ n \in \mathbb{N}, 0 < p < 2^n \right\}.$$

Entonces A_2 es numerable, $[0, 1) \setminus A_2$ es infinito (porque contiene a los números irracionales) y

$$[0, 1) = ([0, 1) \setminus A_2) \cup A_2 \sim [0, 1) \setminus A_2.$$

Cada elemento del conjunto $[0, 1) \setminus A_2$ tiene una única representación binaria

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k},$$

y definimos $g \colon [0, 1) \setminus A_2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ como

$$g(x) := \{k \in \mathbb{N} \colon \ a_k = 1\}.$$

Entonces g es inyectiva, y $[0, 1) \sim [0, 1) \setminus A_2 \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Por el teorema de Cantor–Schröder–Bernstein, $[0, 1) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$. $\square$

9 Ejemplo. El conjunto de Cantor.