Propiedades de bolas en espacios normados
(un tema de la unidad “Espacios normados”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

20 de septiembre de 2022

Propiedades de bolas en un espacio métrico (repaso)

Sea (X, d) un espacio métrico.

$$B(a, r) := \{x \in X : \ d(x, a) < r\} \qquad (a \in X, \ r > 0).$$

- Sobre bolas concéntricas:

  si $a \in X$, $0 < r_1 < r_2$, entonces $B(a, r_1) \subseteq B(a, r_2)$.
- Sobre una bola contenida en otra:

  si $a_1, a_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$, $d(a_1, a_2) + r_1 \leq r_2$, entonces $B(a_1, r_1) \subseteq B(a_2, r_2)$.
- Sobre bolas disjuntas:

  si $a_1, a_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$, $r_1 + r_2 \leq d(a_1, a_2)$, entonces $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset$.

Bolas en un espacio normado

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo. Entonces

$$B(a,r) = \{v \in V : \quad \|v - a\| < r\}.$$

Bolas en un espacio normado

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo. Entonces

$$B(a,r) = \{v \in V : \quad \|v - a\| < r\}.$$

Ejercicio. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo.

Demostrar las siguientes propiedades:

$$B(a,r) = a + B(0_V, r), \qquad B(0_V, r) = r\,B(0_V, 1), \qquad B(a,r) = a + r\,B(0_V, 1).$$

Bolas en un espacio normado

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo. Entonces

$$B(a,r) = \{v \in V: \quad \|v-a\| < r\}.$$

Ejercicio. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo.
Demostrar las siguientes propiedades:

$$B(a,r) = a + B(0_V, r), \qquad B(0_V, r) = r\,B(0_V, 1), \qquad B(a,r) = a + r\,B(0_V, 1).$$

Se recomienda usar las fórmulas

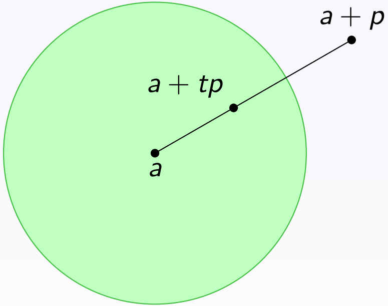
$$a + Y \; = \; \{v \in V\colon\; v - a \in Y\}, \qquad r\,Y \; = \; \left\{v \in V\colon \quad \frac{1}{r}v \in Y\right\}.$$

La bola en un espacio normado
contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

Proposición

Sea V un espacio normado complejo
y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$.
Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \qquad \iff \qquad t <$$

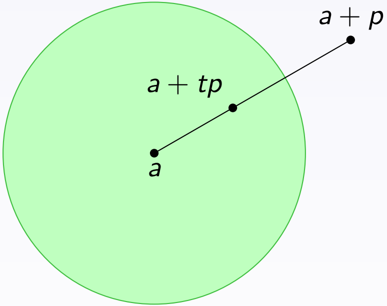


La bola en un espacio normado contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$. Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t <$$



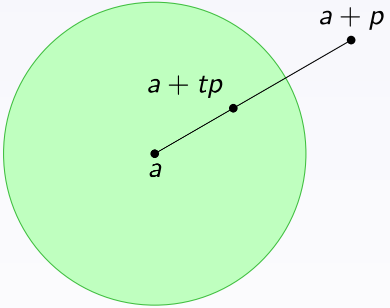
Demostración: $\|(a + tp) - a\| < r$

La bola en un espacio normado contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$. Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t <$$



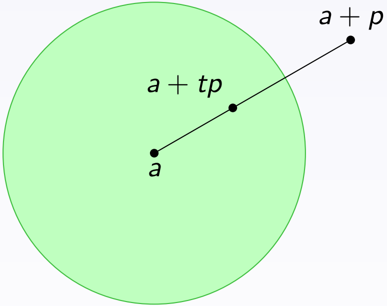
Demostración: $\quad \|(a + tp) - a\| < r \quad \Longleftrightarrow$

La bola en un espacio normado contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

Proposición

Sea V un espacio normado complejo
y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$.
Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t <$$



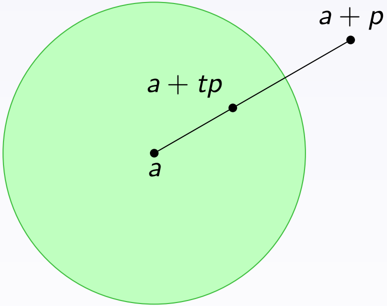
Demostración: $\|(a + tp) - a\| < r \quad \Longleftrightarrow \quad t\,\|p\| < r$

La bola en un espacio normado contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$. Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t <$$



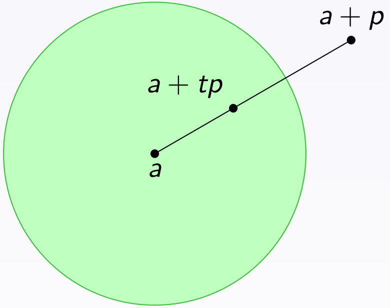
Demostración: $\|(a + tp) - a\| < r \quad \Longleftrightarrow \quad t\,\|p\| < r \quad \Longleftrightarrow$

La bola en un espacio normado contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$. Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t < \frac{r}{\|p\|}.$$



Demostración: $\|(a + tp) - a\| < r \quad \Longleftrightarrow \quad t\,\|p\| < r \quad \Longleftrightarrow \quad t < \dfrac{r}{\|p\|}.$

Convexidad de bolas en espacios normados

Proposición

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Convexidad de bolas en espacios normados

Proposición

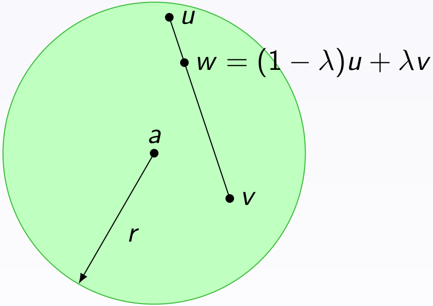
Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$,

$$w := (1 - \lambda)u + \lambda v.$$

Mostremos que

$$\|w - a\| < r.$$



Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$.

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a,r)$, $\lambda \in [0,1]$, $\quad w := (1-\lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a,r)$.

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a,r)$, $\lambda \in [0,1]$, $\quad w := (1-\lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a,r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\|w - a\|$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a,r)$, $\lambda \in [0,1]$, $\quad w := (1-\lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a,r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\|w - a\| =$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\|w - a\| = \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\|$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a,r)$, $\lambda \in [0,1]$, $\quad w := (1-\lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a,r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\|w - a\| = \|(1-\lambda)u + \lambda v - (1-\lambda)a - \lambda a\| =$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\|w - a\| = \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\|$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a,r)$, $\lambda \in [0,1]$, $\quad w := (1-\lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a,r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\|w - a\| = \|(1-\lambda)u + \lambda v - (1-\lambda)a - \lambda a\| = \|(1-\lambda)(u-a) + \lambda(v-a)\|$$

$$\leq$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\|w - a\| &= \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\| \\
&\leq \|(1 - \lambda)(u - a)\| + \|\lambda(v - a)\|
\end{aligned}
$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a,r)$, $\lambda \in [0,1]$, $\quad w := (1-\lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a,r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\|w - a\| &= \|(1-\lambda)u + \lambda v - (1-\lambda)a - \lambda a\| = \|(1-\lambda)(u-a) + \lambda(v-a)\| \\
&\le \|(1-\lambda)(u-a)\| + \|\lambda(v-a)\| =
\end{aligned}
$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \|w - a\| &= \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\| \\ &\le \|(1 - \lambda)(u - a)\| + \|\lambda(v - a)\| = \underbrace{(1 - \lambda)}_{>0} \|u - a\| + \underbrace{\lambda}_{>0} \|v - a\| \end{aligned}$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a,r)$, $\lambda \in [0,1]$, $\quad w := (1-\lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a,r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|w-a\| &= \|(1-\lambda)u + \lambda v - (1-\lambda)a - \lambda a\| = \|(1-\lambda)(u-a) + \lambda(v-a)\| \\
&\le \|(1-\lambda)(u-a)\| + \|\lambda(v-a)\| = \underbrace{(1-\lambda)}_{>0}\|u-a\| + \underbrace{\lambda}_{>0}\|v-a\| \\
&<
\end{aligned}$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1-\lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\|w - a\| &= \|(1-\lambda)u + \lambda v - (1-\lambda)a - \lambda a\| = \|(1-\lambda)(u-a) + \lambda(v-a)\| \\
&\le \|(1-\lambda)(u-a)\| + \|\lambda(v-a)\| = \underbrace{(1-\lambda)}_{>0}\|u-a\| + \underbrace{\lambda}_{>0}\|v-a\| \\
&< (1-\lambda)r + \lambda r
\end{aligned}
$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a,r)$, $\lambda \in [0,1]$, $\quad w := (1-\lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a,r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\|w-a\| &= \|(1-\lambda)u + \lambda v - (1-\lambda)a - \lambda a\| = \|(1-\lambda)(u-a) + \lambda(v-a)\| \\
&\le \|(1-\lambda)(u-a)\| + \|\lambda(v-a)\| = \underbrace{(1-\lambda)}_{>0}\|u-a\| + \underbrace{\lambda}_{>0}\|v-a\| \\
&< (1-\lambda)r + \lambda r =
\end{aligned}
$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\|w - a\| &= \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\| \\
&\leq \|(1 - \lambda)(u - a)\| + \|\lambda(v - a)\| = \underbrace{(1 - \lambda)}_{>0} \|u - a\| + \underbrace{\lambda}_{>0} \|v - a\| \\
&< (1 - \lambda)r + \lambda r = r.
\end{aligned}
$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1-\lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|w - a\| &= \|(1-\lambda)u + \lambda v - (1-\lambda)a - \lambda a\| = \|(1-\lambda)(u-a) + \lambda(v-a)\| \\
&\le \|(1-\lambda)(u-a)\| + \|\lambda(v-a)\| = \underbrace{(1-\lambda)}_{>0}\|u-a\| + \underbrace{\lambda}_{>0}\|v-a\| \\
&< (1-\lambda)r + \lambda r = r.
\end{aligned}$$

Hemos mostrado que $w \in B(a, r)$.

Propiedades de bolas en un espacio normado

Ejercicio. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo, $V \neq \{0_V\}$.
Demostrar las siguientes propiedades:

$$
\begin{aligned}
B(a_1, r_1) \subseteq B(a_1, r_2) \qquad &\Longrightarrow \qquad r_1 \le r_2, \\
B(a_1, r_1) \subseteq B(a_2, r_2) \qquad &\Longrightarrow \qquad \|a_1 - a_2\| + r_1 \le r_2, \\
B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset \qquad &\Longrightarrow \qquad r_1 + r_2 \le \|a_1 - a_2\|.
\end{aligned}
$$

Se recomienda demostrar estas propiedades en forma contrapositiva:

$$
r_1 > r_2 \qquad \Longrightarrow \qquad B(a_1, r_1) \setminus B(a_1, r_2) \neq \emptyset.
$$

En cada caso hay que construir un vector.

Ejercicio. Sean V un espacio normado complejo, $V \neq \{0_V\}$, $a \in V$, $r_1, r_2 > 0$.

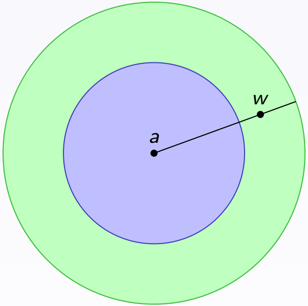
$$r_1 < r_2.$$

Demostrar que $B(a, r_2) \setminus B(a, r_1) \neq \emptyset$.

Ejercicio. Sean V un espacio normado complejo, $V \neq \{0_V\}$, $a \in V$, $r_1, r_2 > 0$.

$$r_1 < r_2.$$

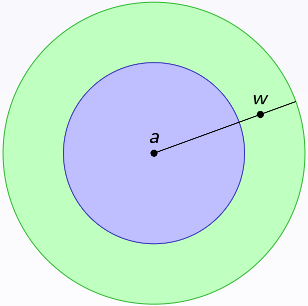
Demostrar que $B(a, r_2) \setminus B(a, r_1) \neq \emptyset$.



Ejercicio. Sean V un espacio normado complejo, $V \neq \{0_V\}$, $a \in V$, $r_1, r_2 > 0$.

$$r_1 < r_2.$$

Demostrar que $B(a, r_2) \setminus B(a, r_1) \neq \emptyset$.



Sea $b \in V \setminus \{0_V\}$.

Construir $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$w := a + \lambda b,$$

tal que

$$r_1 \leq \|w - a\| < r_2.$$

Ejercicio. Sean V un espacio normado complejo, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

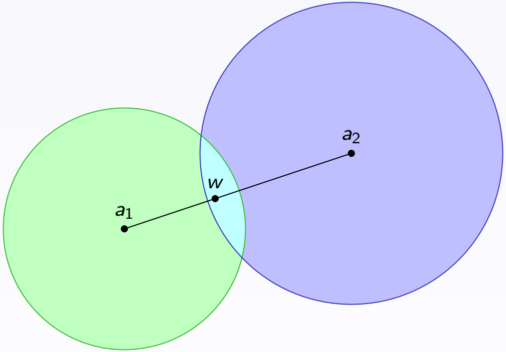
$$\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2.$$

Demostrar que $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.

Ejercicio. Sean V un espacio normado complejo, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

$$\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2.$$

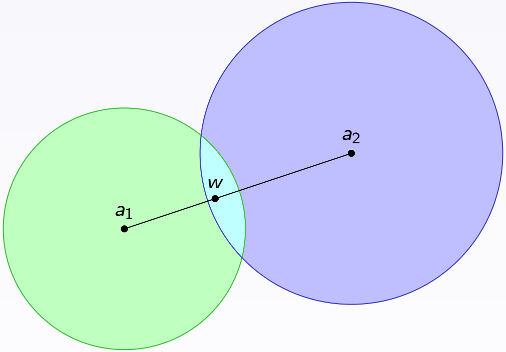
Demostrar que $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.



Ejercicio. Sean V un espacio normado complejo, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

$$\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2.$$

Demostrar que $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.



Construir $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$w := (1 - \lambda)a_1 + \lambda a_2,$$

tal que

$$\|w - a_1\| < r_1, \quad \|w - a_2\| < r_2.$$

Proposición

Sea V un espacio normado complejo, $V \neq \{0_V\}$, y sean $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$, tales que

$$\|a_1 - a_2\| + r_1 > r_2.$$

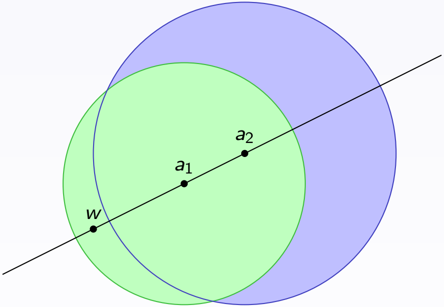
Entonces $B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.

Proposición

Sea V un espacio normado complejo, $V \neq \{0_V\}$, y sean $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$, tales que

$$\|a_1 - a_2\| + r_1 > r_2.$$

Entonces $B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.

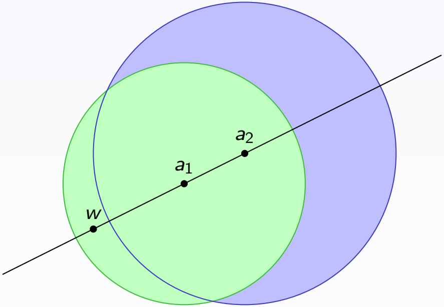


Proposición

Sea V un espacio normado complejo, $V \neq \{0_V\}$, y sean $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$, tales que

$$\|a_1 - a_2\| + r_1 > r_2.$$

Entonces $B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.



Excluimos el caso $a_1 = a_2$

(es uno de los ejercicios anteriores).

Vamos a construir $\lambda > 0$ y

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2),$$

tales que $\quad \|w - a_1\| < r_1, \quad \|w - a_2\| \geq r_2.$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2)$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) =$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\|$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1+\lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| =$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\|$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| =$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1 + \lambda) \|a_1 - a_2\|.$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1+\lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1+\lambda) \|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1 + \lambda) \|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda <$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1+\lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1+\lambda)\|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda < \frac{r_1}{\|a_1 - a_2\|},$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1+\lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1+\lambda) \|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda < \frac{r_1}{\|a_1 - a_2\|}, \qquad \lambda$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1 + \lambda) \|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda < \frac{r_1}{\|a_1 - a_2\|}, \qquad \lambda \geq$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1 + \lambda) \|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda < \frac{r_1}{\|a_1 - a_2\|}, \qquad \lambda \geq \frac{r_2 - \|a_1 - a_2\|}{\|a_1 - a_2\|}.$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1+\lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1+\lambda)\|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda < \frac{r_1}{\|a_1 - a_2\|}, \qquad \lambda \geq \frac{r_2 - \|a_1 - a_2\|}{\|a_1 - a_2\|}.$$

Gracias a la suposición $r_1 > r_2 - \|a_1 - a_2\|$, una solución es λ

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1 + \lambda) \|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda < \frac{r_1}{\|a_1 - a_2\|}, \qquad \lambda \geq \frac{r_2 - \|a_1 - a_2\|}{\|a_1 - a_2\|}.$$

Gracias a la suposición $r_1 > r_2 - \|a_1 - a_2\|$, una solución es $\lambda =$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1+\lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1+\lambda) \|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda < \frac{r_1}{\|a_1 - a_2\|}, \qquad \lambda \geq \frac{r_2 - \|a_1 - a_2\|}{\|a_1 - a_2\|}.$$

Gracias a la suposición $r_1 > r_2 - \|a_1 - a_2\|$, una solución es $\lambda = \dfrac{r_2 - \|a_1 - a_2\|}{\|a_1 - a_2\|}$.