El producto de dos espacios topológicos (un tema de análisis)

Egor Maximenko,
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

8 de febrero de 2022

Objetivos.

- Conocer la definición del producto de dos espacios topológicos.
- Conocer sus propiedades básicas.
- Estudiar el concepto de continuidad de funciones de dos argumentos.

Prerrequisitos.

- Topologías y espacios topológicos.
- Bases de topologías ("topobases").
- Funciones continuas.
- Algunas propiedades de productos cartesianos.

Repaso: algunas propiedades de productos cartesianos

Sean A, B, C, D algunos conjuntos. Entonces.

$$(A \times B) \cap (C \times D) =$$

Repaso: algunas propiedades de productos cartesianos

Sean A, B, C, D algunos conjuntos. Entonces.

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Repaso: una base de topología (“topobase”)

Definición

Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$.

Decimos que β es una topobase, si β tiene las siguientes propiedades.

1. $\cup\beta = X$.
2. $\forall A_1, A_2 \in \beta \quad x \in A_1 \cap A_2 \quad \exists A_3 \in \beta \quad (x \in A_3 \quad \wedge \quad A_3 \subseteq A_1 \cap A_2)$.

Repaso: una base de topología (“topobase”)

Definición

Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$.

Decimos que β es una topobase, si β tiene las siguientes propiedades.

1. $\cup\beta = X$.
2. $\forall A_1, A_2 \in \beta \quad x \in A_1 \cap A_2 \quad \exists A_3 \in \beta \quad (x \in A_3 \quad \wedge \quad A_3 \subseteq A_1 \cap A_2)$.

Observación. En esta definición no está dada ninguna topología.

Repaso: la topología generada por una topobase

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$. Supongamos que β es una topobase.

Definimos τ de la siguiente manera:

$$\tau := \{A \subseteq 2^X : \quad \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup\gamma\}.$$

Entonces τ es una topología.

Descripción local de los conjuntos abiertos por medio de una base de la topología

Proposición

Sean X un conjunto, β una topobase sobre X y τ la topología generada por β. Entonces para cada $A \subseteq X$ las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $A \in \tau$;

(b) $\forall x \in A \quad \exists B \in \beta \quad (x \in B \quad \wedge \quad B \subseteq A)$.

La topobase que consiste de los productos cartesianos

En este tema suponemos que (X, τ_X), (Y, τ_Y) son espacios topológicos.

La topobase que consiste de los productos cartesianos

En este tema suponemos que (X, τ_X), (Y, τ_Y) son espacios topológicos.

Proposición

Pongamos

$$\mathcal{P} \coloneqq \{A \times B \colon \ A \in \tau_X, \ B \in \tau_Y\}.$$

Entonces $\mathcal{P}$ es una topobase sobre $X \times Y$.

Demostración, primera propiedad

$$\mathcal{P} \coloneqq \{A \times B\colon\ A \in \tau_X,\ B \in \tau_Y\}.$$

Demostración, primera propiedad

$$\mathcal{P} \coloneqq \{A \times B\colon\ A \in \tau_X,\ B \in \tau_Y\}.$$

$X \times Y \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{P} \subseteq 2^{X \times Y}$, por eso

$$\cup\mathcal{P} =$$

Demostración, primera propiedad

$$\mathcal{P} \coloneqq \{A \times B\colon\ A \in \tau_X,\ B \in \tau_Y\}.$$

$X \times Y \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{P} \subseteq 2^{X \times Y}$, por eso

$$\cup\mathcal{P} = X \times Y.$$

Demostración, segunda propiedad

Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ y sea $(x, y) \in P_1 \cap P_2$.

Demostración, segunda propiedad

Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ y sea $(x, y) \in P_1 \cap P_2$.

Pongamos

$$P_3 := P_1 \cap P_2.$$

Demostración, segunda propiedad

Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ y sea $(x, y) \in P_1 \cap P_2$.

Pongamos

$$P_3 := P_1 \cap P_2.$$

Encontramos $A_1, A_2 \in \tau_X$ y $B_1, B_2 \in \tau_Y$ tales que

$$P_1 = A_1 \times B_1, \qquad P_2 = A_2 \times B_2.$$

Demostración, segunda propiedad

Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ y sea $(x, y) \in P_1 \cap P_2$.

Pongamos

$$P_3 := P_1 \cap P_2.$$

Encontramos $A_1, A_2 \in \tau_X$ y $B_1, B_2 \in \tau_Y$ tales que

$$P_1 = A_1 \times B_1, \qquad P_2 = A_2 \times B_2.$$

Luego

$$P_3 = P_1 \cap P_2 =$$

Demostración, segunda propiedad

Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ y sea $(x, y) \in P_1 \cap P_2$.

Pongamos

$$P_3 := P_1 \cap P_2.$$

Encontramos $A_1, A_2 \in \tau_X$ y $B_1, B_2 \in \tau_Y$ tales que

$$P_1 = A_1 \times B_1, \qquad P_2 = A_2 \times B_2.$$

Luego

$$P_3 = P_1 \cap P_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$

así que

Demostración, segunda propiedad

Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ y sea $(x, y) \in P_1 \cap P_2$.

Pongamos
$$P_3 := P_1 \cap P_2.$$

Encontramos $A_1, A_2 \in \tau_X$ y $B_1, B_2 \in \tau_Y$ tales que
$$P_1 = A_1 \times B_1, \qquad P_2 = A_2 \times B_2.$$

Luego
$$P_3 = P_1 \cap P_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$

así que $P_3 \in \mathcal{P}$.

Demostración, segunda propiedad

Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ y sea $(x, y) \in P_1 \cap P_2$.

Pongamos

$$P_3 := P_1 \cap P_2.$$

Encontramos $A_1, A_2 \in \tau_X$ y $B_1, B_2 \in \tau_Y$ tales que

$$P_1 = A_1 \times B_1, \qquad P_2 = A_2 \times B_2.$$

Luego

$$P_3 = P_1 \cap P_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$

así que $P_3 \in \mathcal{P}$.

Más aún, $(x, y) \in P_3$ y $P_3 \subseteq P_1 \cap P_2$.

Definición de la topología del producto de dos espacios topológicos

Definición

Denotemos por $\tau_{X \times Y}$ a la topología generada por la topobase $\mathcal{P}$.

Definición de la topología del producto de dos espacios topológicos

Definición

Denotemos por $\tau_{X \times Y}$ a la topología generada por la topobase $\mathcal{P}$.

Según las definiciones, los elementos de $\tau_{X \times Y}$ son

Definición de la topología del producto de dos espacios topológicos

Definición

Denotemos por $\tau_{X\times Y}$ a la topología generada por la topobase $\mathcal{P}$.

Según las definiciones, los elementos de $\tau_{X\times Y}$ son las uniones de subcolecciones de $\mathcal{P}$.

$$\tau_{X\times Y} = \{C \subseteq X \times Y\colon \quad \exists \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P} \quad C = \cup\mathcal{Q}\}.$$

Descripción local de los elementos de $\tau_{X\times Y}$

Proposición

Sea $V \subseteq X \times Y$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $V \in \tau_{X\times Y}$.

(b) $\forall (x,y) \in V \quad \exists A \in \tau_X \quad \exists B \in \tau_Y \quad (x \in A \quad \wedge \quad y \in B \quad A \times B \subseteq V)$.

Ejercicio: demostrar la proposición.

Las proyecciones canónicas son continuas

Definimos $\pi_1 \colon X \times Y \to X, \quad \pi_2 \colon X \times Y \to Y,$

$$\pi_1(x, y) \coloneqq x, \qquad \pi_2(x, y) \coloneqq y.$$

Proposición

Las funciones π_1 y π_2 son continuas.

Demostración que π_1 es continua

$$\pi_1 \colon X \times Y \to X, \qquad \pi_1(x, y) := x.$$

Demostración que π_1 es continua

$$\pi_1\colon X \times Y \to X, \qquad \pi_1(x, y) \coloneqq x.$$

Sea $A \in \tau_X$. Entonces

$$\pi_1^{-1}[A]$$

Demostración que π_1 es continua

$$\pi_1 \colon X \times Y \to X, \qquad \pi_1(x, y) := x.$$

Sea $A \in \tau_X$. Entonces

$$\pi_1^{-1}[A] =$$

Demostración que π_1 es continua

$$\pi_1 \colon X \times Y \to X, \qquad \pi_1(x, y) := x.$$

Sea $A \in \tau_X$. Entonces

$$\pi_1^{-1}[A] = A \times Y$$

Demostración que π_1 es continua

$$\pi_1 \colon X \times Y \to X, \qquad \pi_1(x, y) := x.$$

Sea $A \in \tau_X$. Entonces

$$\pi_1^{-1}[A] = A \times Y \in$$

Demostración que π_1 es continua

$$\pi_1 \colon X \times Y \to X, \qquad \pi_1(x, y) := x.$$

Sea $A \in \tau_X$. Entonces

$$\pi_1^{-1}[A] = A \times Y \in \mathcal{P}$$

Demostración que π_1 es continua

$$\pi_1 \colon X \times Y \to X, \qquad \pi_1(x, y) := x.$$

Sea $A \in \tau_X$. Entonces

$$\pi_1^{-1}[A] = A \times Y \in \mathcal{P} \subseteq$$

Demostración que π_1 es continua

$$\pi_1 \colon X \times Y \to X, \qquad \pi_1(x,y) := x.$$

Sea $A \in \tau_X$. Entonces

$$\pi_1^{-1}[A] = A \times Y \in \mathcal{P} \subseteq \tau_{X\times Y}.$$

Las proyecciones canónicas son abiertas

Proposición

Las funciones π_1, π_2 son abiertas.

Demostración: las imágenes de los elementos de $\mathcal{P}$ son abiertas

Sea $V \in \mathcal{P}$. Mostremos que $\pi_1[V] \in \tau_X$.

Demostración: las imágenes de los elementos de $\mathcal{P}$ son abiertas

Sea $V \in \mathcal{P}$. Mostremos que $\pi_1[V] \in \tau_X$.

Si $V = \emptyset$, entonces $\pi_1[V] = \emptyset \in \tau_X$.

Demostración: las imágenes de los elementos de $\mathcal{P}$ son abiertas

Sea $V \in \mathcal{P}$. Mostremos que $\pi_1[V] \in \tau_X$.

Si $V = \emptyset$, entonces $\pi_1[V] = \emptyset \in \tau_X$.

Sea $V \neq \emptyset$. Entonces existen $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$, tales que

$$V = A \times B, \qquad A \neq \emptyset, \qquad B \neq \emptyset.$$

Ejercicio. Para este caso, demostrar que $\pi_1[V] = A$.

Demostración: las imágenes de los elementos de $\tau_{X\times Y}$ son abiertas en X

Sea $W \in \tau_{X\times Y}$.

Demostración: las imágenes de los elementos de $\tau_{X\times Y}$ son abiertas en X

Sea $W \in \tau_{X\times Y}$.

Como $\tau_{X\times Y}$ está generada por $\mathcal{P}$,

Demostración: las imágenes de los elementos de $\tau_{X\times Y}$ son abiertas en X

Sea $W \in \tau_{X\times Y}$.

Como $\tau_{X\times Y}$ está generada por $\mathcal{P}$, existe una familia $(V_j)_{j\in J}$ con valores en $\mathcal{P}$ tal que

$$W$$

Demostración: las imágenes de los elementos de $\tau_{X \times Y}$ son abiertas en X

Sea $W \in \tau_{X \times Y}$.

Como $\tau_{X \times Y}$ está generada por $\mathcal{P}$, existe una familia $(V_j)_{j \in J}$ con valores en $\mathcal{P}$ tal que

$$W =$$

Demostración: las imágenes de los elementos de $\tau_{X \times Y}$ son abiertas en X

Sea $W \in \tau_{X \times Y}$.

Como $\tau_{X \times Y}$ está generada por $\mathcal{P}$, existe una familia $(V_j)_{j \in J}$ con valores en $\mathcal{P}$ tal que

$$W = \bigcup_{j \in J} V_j.$$

Demostración: las imágenes de los elementos de $\tau_{X\times Y}$ son abiertas en X

Sea $W \in \tau_{X\times Y}$.

Como $\tau_{X\times Y}$ está generada por $\mathcal{P}$, existe una familia $(V_j)_{j\in J}$ con valores en $\mathcal{P}$ tal que

$$W = \bigcup_{j\in J} V_j.$$

Luego

Demostración: las imágenes de los elementos de $\tau_{X\times Y}$ son abiertas en X

Sea $W \in \tau_{X\times Y}$.

Como $\tau_{X\times Y}$ está generada por $\mathcal{P}$, existe una familia $(V_j)_{j\in J}$ con valores en $\mathcal{P}$ tal que

$$W = \bigcup_{j\in J} V_j.$$

Luego

$$\pi_1[W]$$

Demostración: las imágenes de los elementos de $\tau_{X\times Y}$ son abiertas en X

Sea $W \in \tau_{X\times Y}$.

Como $\tau_{X\times Y}$ está generada por $\mathcal{P}$, existe una familia $(V_j)_{j\in J}$ con valores en $\mathcal{P}$ tal que

$$W = \bigcup_{j\in J} V_j.$$

Luego

$$\pi_1[W] =$$

Demostración: las imágenes de los elementos de $\tau_{X\times Y}$ son abiertas en X

Sea $W \in \tau_{X\times Y}$.

Como $\tau_{X\times Y}$ está generada por $\mathcal{P}$, existe una familia $(V_j)_{j\in J}$ con valores en $\mathcal{P}$ tal que

$$W = \bigcup_{j\in J} V_j.$$

Luego

$$\pi_1[W] = \bigcup_{j\in J} \pi_1[V_j]$$

Demostración: las imágenes de los elementos de $\tau_{X\times Y}$ son abiertas en X

Sea $W \in \tau_{X\times Y}$.

Como $\tau_{X\times Y}$ está generada por $\mathcal{P}$, existe una familia $(V_j)_{j\in J}$ con valores en $\mathcal{P}$ tal que

$$W = \bigcup_{j\in J} V_j.$$

Luego

$$\pi_1[W] = \bigcup_{j\in J} \pi_1[V_j] \in$$

Demostración: las imágenes de los elementos de $\tau_{X\times Y}$ son abiertas en X

Sea $W \in \tau_{X\times Y}$.

Como $\tau_{X\times Y}$ está generada por $\mathcal{P}$, existe una familia $(V_j)_{j\in J}$ con valores en $\mathcal{P}$ tal que

$$W = \bigcup_{j\in J} V_j.$$

Luego

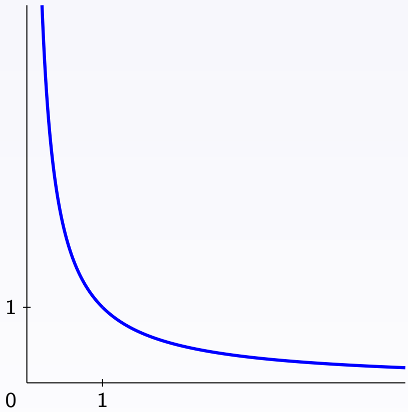
$$\pi_1[W] = \bigcup_{j\in J} \pi_1[V_j] \in \tau_X.$$

Ejemplo: las funciones π_1 y π_2 no siempre son cerradas

$X = Y = \mathbb{R}$ con la topología usual.

$$H = \{(x, y) \in (0, +\infty)^2 \colon \; xy = 1\}.$$

Mostrar que H es cerrado en $\mathbb{R}^2$.



Ejemplo: las funciones π_1 y π_2 no siempre son cerradas

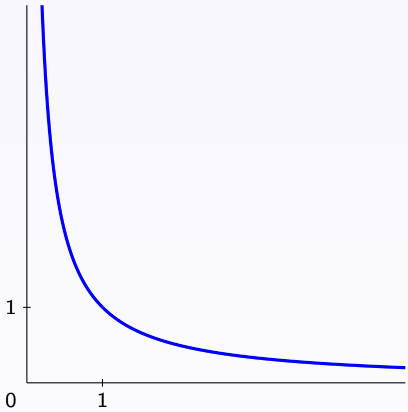
$X = Y = \mathbb{R}$ con la topología usual.

$$H = \{(x, y) \in (0, +\infty)^2 \colon \ xy = 1\}.$$

Mostrar que H es cerrado en $\mathbb{R}^2$.

Mostrar que

$$\pi_1[H] = \pi_2(H) =$$



Ejemplo: las funciones π_1 y π_2 no siempre son cerradas

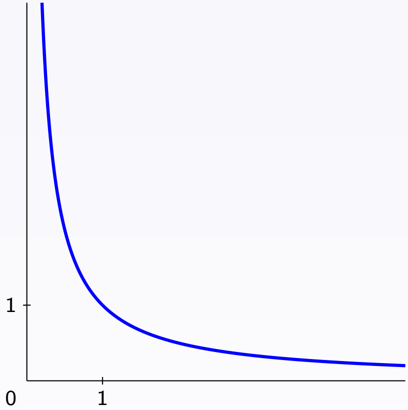
$X = Y = \mathbb{R}$ con la topología usual.

$$H = \{(x, y) \in (0, +\infty)^2 \colon\ xy = 1\}.$$

Mostrar que H es cerrado en $\mathbb{R}^2$.

Mostrar que

$$\pi_1[H] = \pi_2(H) = (0, +\infty).$$



Propiedad extremal de la topología del producto

Proposición

$\tau_{X \times Y}$ es la más débil entre las topologías respecto a las cuales las funciones π_1, π_2 son continuas.

Demostración

Sea ω una topología en $X \times Y$ tal que son continuas las funciones

$$\pi_1 \colon (X \times Y, \omega) \to (X, \tau_X), \qquad \pi_2 \colon (X \times Y, \omega) \to (Y, \tau_Y).$$

Demostración

Sea ω una topología en $X \times Y$ tal que son continuas las funciones

$$\pi_1 \colon (X \times Y, \omega) \to (X, \tau_X), \qquad \pi_2 \colon (X \times Y, \omega) \to (Y, \tau_Y).$$

Entonces para cada $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ obtenemos

$$A \times B$$

Demostración

Sea ω una topología en $X \times Y$ tal que son continuas las funciones

$$\pi_1 \colon (X \times Y, \omega) \to (X, \tau_X), \qquad \pi_2 \colon (X \times Y, \omega) \to (Y, \tau_Y).$$

Entonces para cada $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ obtenemos

$$A \times B =$$

Demostración

Sea ω una topología en $X \times Y$ tal que son continuas las funciones

$$\pi_1 \colon (X \times Y, \omega) \to (X, \tau_X), \qquad \pi_2 \colon (X \times Y, \omega) \to (Y, \tau_Y).$$

Entonces para cada $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ obtenemos

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$$

Demostración

Sea ω una topología en $X \times Y$ tal que son continuas las funciones

$$\pi_1 \colon (X \times Y, \omega) \to (X, \tau_X), \qquad \pi_2 \colon (X \times Y, \omega) \to (Y, \tau_Y).$$

Entonces para cada $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ obtenemos

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) =$$

Demostración

Sea ω una topología en $X \times Y$ tal que son continuas las funciones

$$\pi_1 \colon (X \times Y, \omega) \to (X, \tau_X), \qquad \pi_2 \colon (X \times Y, \omega) \to (Y, \tau_Y).$$

Entonces para cada $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ obtenemos

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) = \pi_1^{-1}[A] \cap \pi_2^{-1}[B]$$

Demostración

Sea ω una topología en $X \times Y$ tal que son continuas las funciones

$$\pi_1 \colon (X \times Y, \omega) \to (X, \tau_X), \qquad \pi_2 \colon (X \times Y, \omega) \to (Y, \tau_Y).$$

Entonces para cada $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ obtenemos

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) = \pi_1^{-1}[A] \cap \pi_2^{-1}[B] \in$$

Demostración

Sea ω una topología en $X \times Y$ tal que son continuas las funciones

$$\pi_1 \colon (X \times Y, \omega) \to (X, \tau_X), \qquad \pi_2 \colon (X \times Y, \omega) \to (Y, \tau_Y).$$

Entonces para cada $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ obtenemos

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) = \pi_1^{-1}[A] \cap \pi_2^{-1}[B] \in \omega.$$

Demostración

Sea ω una topología en $X \times Y$ tal que son continuas las funciones

$$\pi_1 \colon (X \times Y, \omega) \to (X, \tau_X), \qquad \pi_2 \colon (X \times Y, \omega) \to (Y, \tau_Y).$$

Entonces para cada $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ obtenemos

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) = \pi_1^{-1}[A] \cap \pi_2^{-1}[B] \in \omega.$$

Hemos mostrado que

Demostración

Sea ω una topología en $X \times Y$ tal que son continuas las funciones

$$\pi_1 \colon (X \times Y, \omega) \to (X, \tau_X), \qquad \pi_2 \colon (X \times Y, \omega) \to (Y, \tau_Y).$$

Entonces para cada $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ obtenemos

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) = \pi_1^{-1}[A] \cap \pi_2^{-1}[B] \in \omega.$$

Hemos mostrado que $\quad \mathcal{P} \subseteq \omega.$

Demostración

Sea ω una topología en $X \times Y$ tal que son continuas las funciones

$$\pi_1 \colon (X \times Y, \omega) \to (X, \tau_X), \qquad \pi_2 \colon (X \times Y, \omega) \to (Y, \tau_Y).$$

Entonces para cada $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ obtenemos

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) = \pi_1^{-1}[A] \cap \pi_2^{-1}[B] \in \omega.$$

Hemos mostrado que $\quad \mathcal{P} \subseteq \omega.$

La colección ω es cerrada bajo las uniones, por eso

Demostración

Sea ω una topología en $X \times Y$ tal que son continuas las funciones

$$\pi_1 \colon (X \times Y, \omega) \to (X, \tau_X), \qquad \pi_2 \colon (X \times Y, \omega) \to (Y, \tau_Y).$$

Entonces para cada $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ obtenemos

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) = \pi_1^{-1}[A] \cap \pi_2^{-1}[B] \in \omega.$$

Hemos mostrado que $\quad \mathcal{P} \subseteq \omega.$

La colección ω es cerrada bajo las uniones, por eso $\quad \tau_{X \times Y} \subseteq \omega.$

Criterio de continuidad en un punto para funciones definidas en $X \times Y$

Proposición

Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y), (Z, τ_Z) espacios topológicos,

$$f \colon X \times Y \to Z, \qquad (a, b) \in X \times Y.$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es continua en (a, b);

(b) para cada C en τ_Z con $f(a, b) \in C$, existen A en τ_X y B en τ_Y tales que

$$a \in A, \qquad b \in B, \qquad f[A \times B] \subseteq C.$$

Ejercicio. Demostrar la proposición usando la descripción local de $\tau_{X \times Y}$.

Criterio de continuidad de funciones con valores en $X \times Y$

Ejercicio. Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y), (Z, τ_Z) espacios topológicos y sea

$$f \colon Z \to X \times Y.$$

Demostrar que f es continua si, y solo si, las funciones $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ son continuas.

El producto de dos espacios métricos

Ejercicio. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos.

Definimos $\rho\colon (X \times Y)^2 \to [0, +\infty)$,

$$\rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := \max\big\{d_X(x_1, x_2),\ d_Y(y_1, y_2)\big\}.$$

Demostrar que ρ es una distancia.

Demostrar que la topología inducida por ρ coincide con la topología del producto.