

El producto de dos espacios topológicos

Objetivos. Definir el producto de dos espacios topológicos. Estudiar el concepto de continuidad de funciones de dos argumentos.

Prerrequisitos. Topologías, bases de topológicas, funciones continuas.

En este tema suponemos que (X, τ_X) , (Y, τ_Y) son espacios topológicos.

1 Proposición. Pongamos $\mathcal{P} := \{A \times B : A \in \tau_X, B \in \tau_Y\}$. Entonces \mathcal{P} es una base de topología en $X \times Y$.

Demostración. 1. La propiedad $\cup \mathcal{P} = X \times Y$ se sigue del hecho que $X \times Y \in \mathcal{P}$.

2. Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ y sea $(x, y) \in P_1 \cap P_2$. Tenemos que demostrar que existe $P_3 \in \mathcal{P}$ tal que $(x, y) \in P_3 \subseteq P_1 \cap P_2$. En efecto, $P_1 = A_1 \times B_1$, $P_2 = A_2 \times B_2$, donde $A_1, A_2 \in \tau_X$, $B_1, B_2 \in \tau_Y$. Luego $P_1 \cap P_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{P}$. Pongamos $P_3 = P_1 \cap P_2$ y obtenemos que $(x, y) \in P_3 \subseteq P_1 \cap P_2$. \square

2 Definición. Denotemos por $\tau_{X \times Y}$ a la topología generada por la base \mathcal{P} , esto es, la colección de todas las uniones de subcolecciones de \mathcal{P} . Si no se dice otra cosa, entonces $X \times Y$ siempre se considera con esta topología.

3 Observación. De la definición de $\tau_{X \times Y}$ sale la siguiente descripción de los elementos de $\tau_{X \times Y}$. Un conjunto $V \subseteq X \times Y$ pertenece a $\tau_{X \times Y}$ si, y solo si, para cada (x, y) en V existen $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ tales que $x \in A$, $y \in B$, $A \times B \subseteq V$.

Definimos $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$, $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ mediante las reglas

$$\pi_1(x, y) := x, \quad \pi_2(x, y) := y.$$

4 Proposición. Las funciones π_1 y π_2 son continuas.

Demostración. Mostremos que la función π_1 es continua. Sea $A \in \tau_X$. Entonces $\pi_1^{-1}[A] = A \times Y \in \mathcal{P} \subseteq \tau_{X \times Y}$. \square

5 Proposición. Las funciones π_1 y π_2 son abiertas.

Demostración. 1. Mostremos que si $V \in \mathcal{P}$, entonces $\pi_1[V] \in \tau_X$. Sea $V \in \mathcal{P}$. Si $V = \emptyset$, entonces $\pi_1[V] = \emptyset \in \tau_X$. Si $V \neq \emptyset$, entonces existen $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ tales que $V = A \times B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Luego es fácil ver que $\pi_1[V] = A$.

2. Mostremos que si $W \in \tau_{X \times Y}$, entonces $\pi_1[W] \in \tau_X$. Como la topología $\tau_{X \times Y}$ está generada por \mathcal{P} , existe una familia $(V_j)_{j \in J}$ tal que $W = \cup_{j \in J} V_j$. Luego

$$\pi_1[W] = \bigcup_{j \in J} \pi_1[V_j] \in \tau_X. \quad \square$$

6 Ejemplo. Mostremos que las funciones π_1 , π_2 no siempre son cerradas. Consideremos el espacio $X = Y = \mathbb{R}$ con la topología usual y el conjunto

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x > 0, y > 0, xy = 1\}.$$

Entonces el conjunto H es cerrado en \mathbb{R}^2 , pero sus imágenes respecto a π_1 y π_2 no son cerradas: $\pi_1[H] = \pi_2[H] = (0, +\infty)$.

7 Proposición. $\tau_{X \times Y}$ es la más débil entre las topologías con respecto a las cuales las funciones π_1 , π_2 son continuas.

Demostración. Sea ω una topología en $X \times Y$ tal que las funciones $\pi_1: (X \times Y, \omega) \rightarrow (X, \tau_X)$ y $\pi_2: (X \times Y, \omega) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ son continuas. Entonces para cualesquiera $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ obtenemos

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) = \pi_1^{-1}[A] \cap \pi_2^{-1}[B] \in \omega.$$

Hemos mostrado que $\mathcal{P} \subseteq \omega$. Como la colección ω es cerrada bajo uniones, obtenemos que $\tau_{X \times Y} \subseteq \omega$. □

El siguiente criterio de continuidad para funciones definidas en $X \times Y$ sale inmediatamente de la Observación 3.

8 Proposición. Sean (Z, τ_Z) un espacio topológico, $f: X \times Y \rightarrow Z$, $(a, b) \in X \times Y$. Entonces f es continua en (a, b) si, y solo si, para cada C en τ_Z con $f(a, b) \in C$ existen $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$ tales que $a \in A$, $b \in B$, $f[A \times B] \subseteq C$.

9 Ejercicio. Sea (Z, τ_Z) un espacio topológico y sea $f: Z \rightarrow X \times Y$. Demostrar que f es continua si, y solo si, las funciones $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ son continuas.