Producto de medidas

1. Lema. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida. Para todo $Q \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ definamos

$$\varphi_Q \colon Y \to [0, +\infty], \qquad \varphi_Q(x) := \nu(Q_x);$$
$$\psi_Q \colon X \to [0, +\infty], \qquad \psi_Q(y) := \mu(Q^y).$$

Entonces

$$\int\limits_X \varphi_Q \, d\mu = \int\limits_X \left(\int\limits_Y \chi_Q(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x),$$
$$\int\limits_Y \psi_Q \, d\nu = \int\limits_Y \left(\int\limits_X \chi_Q(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y).$$

2. Teorema. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, y sean μ y ν medidas σ-finitas. Entonces para todo Q en $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ se tiene que $\varphi_Q \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $\psi_Q \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, [0, +\infty])$, y

$$\int\limits_X \varphi_Q \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_Y \psi_Q \, \mathrm{d}\nu, \tag{1}$$

donde φ_Q y ψ_Q están definidas como en el lema.

Esquema de demostración. Denotemos por Ω a la colección de todos los conjuntos Q en $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ para los cuales $\varphi_Q \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $\psi_Q \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, [0, +\infty])$, y se cumple la fórmula (1).

1. $\mathcal{S} \subset \Omega$. En otras palabras, si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{G}$, entonces $A \times B \in \Omega$. En efecto,

   $$\varphi_{A \times B} = \nu(B) 1_A, \qquad \psi_{A \times B} = \mu(A) 1_B,$$

   y $\int_X \varphi_{A \times B} \, \mathrm{d}\mu = \mu(A)\nu(B) = \int_Y \psi_{A \times B} \, \mathrm{d}\nu$.

2. La colección Ω es cerrada bajo uniones finitas disjuntas. En efecto, la integral tiene propiedad aditiva.

3. Sea $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente en Ω y sea $Q = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$. Entonces $Q \in \Omega$. En efecto, la sucesión $(\varphi_{P_n})_{n=1}^{\infty}$ es creciente y la función φ_Q es su límite puntual. Puego $\varphi_Q \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y por el teorema de convergencia monótona

   $$\int\limits_X \varphi_Q \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int\limits_X \varphi_{P_n} \, \mathrm{d}\mu.$$

De manera similar, $\psi_Q \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, [0, +\infty])$ y

$$\int\limits_Y \psi_Q \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_Y \psi_{Q_n} \, \mathrm{d}\nu.$$

Además, por la suposición, $\int_X \varphi_{P_n} \, \mathrm{d}\mu = \int_Y \psi_{P_n} \, \mathrm{d}\nu$ para cada n.

4. Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión disjunta en Ω. Entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \in \Omega$. En efecto, para uniones finitas usamos el inciso 2, luego pasamos a la unión numerable usando el inciso 3.

5. Supongamos que $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$, $\mu(A) < +\infty$, $\nu(B) < +\infty$, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente en Ω tal que $P_n \subset A \times B$ para cada n, y $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$. Entonces $Q \in \Omega$. En efecto, aplicamos a las sucesiones de funciones φ_{P_n} y ψ_{P_n} el teorema de convergencia dominada.

6. Sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{F}$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ y $\mu(X_n) < +\infty$ para cada n, y sea $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{G}$ tal que $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ y $\nu(Y_n) < +\infty$ para cada n. Para cada $Q \subset X \times Y$ pongamos

$$Q_{m,n} \coloneqq Q \cap (X_m \times Y_n).$$

Denotemos por $\mathfrak{M}$ la clase de todos los $Q \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tales que $Q_{m,n} \in \Omega$ para cada m, n. Entonces los incisos 1 y 2 muestran que $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$, y los incisos 3 y 5 muestran que $\mathfrak{M}$ es una clase monótona. Luego $\mathfrak{M} = \mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

7. Sea $Q \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Entonces, por el inciso 6, $Q_{m,n} \in \Omega$ para cada m, n. Luego por el inciso 4 concluimos que $Q \in \Omega$. $\square$

3. Definición (producto de medidas). Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, y sean μ y ν medidas σ-finitas. Entonces para todo Q en $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$

$$(\mu \times \nu)(Q) \coloneqq \int\limits_X \varphi_Q \, \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Por el teorema, podemos escribir también

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int\limits_Y \psi_Q \, \mathrm{d}\nu.$$