

# Temas preliminares de Análisis Real

## Problemas para examen

Usamos la notación  $A \subset B$  en el siguiente sentido:  $A$  es un subconjunto de  $B$ , puede ser que  $A = B$ .

### Propiedades de las operaciones con conjuntos

**1. La unión de dos conjuntos contiene a cada uno de los conjuntos originales.** Sean  $A, B$  algunos conjuntos. Demuestre que

$$A \subset A \cup B.$$

De manera similar se demuestra que  $B \subset A \cup B$ .

**2. La unión de dos conjuntos es el conjunto más pequeño entre todos los conjuntos que contienen a cada uno de los conjuntos originales.** Sean  $A, B, C$  algunos conjuntos tales que  $A \subset C$  y  $B \subset C$ . Demuestre que

$$A \cup B \subset C.$$

**3. La intersección de dos conjuntos está contenida en cada uno de los conjuntos originales.** Sean  $A, B$  algunos conjuntos. Demuestre que

$$A \cap B \subset A.$$

De manera similar se demuestra que  $A \cap B \subset B$ .

**4. La intersección de dos conjuntos es el conjunto más grande entre todos los conjuntos contenidos en cada uno de los conjuntos originales.** Sean  $A, B, C$  algunos conjuntos tales que  $C \subset A$  y  $C \subset B$ . Demuestre que

$$C \subset A \cap B.$$

**5. Criterio de que un conjunto está contenido en el otro.** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

$$(i) A \subset B; \quad (ii) A \cap B = A; \quad (iii) A \cup B = B; \quad (iv) A \setminus B = \emptyset.$$

**6. Ley distributiva.** Sean  $A, B, C$  conjuntos. Demuestre que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

**7. Leyes de De Morgan.** Sean  $A, B, C$  conjuntos. Demuestre que

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B), \quad C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

**8. Dos definiciones de la diferencia simétrica.** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Demuestre que

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

El conjunto que está en ambos lados de la igualdad se llama la *diferencia simétrica* de  $A$  y  $B$  y se denota por  $A \triangle B$ .

**9. “Desigualdad del triángulo” para la diferencia simétrica.** Sean  $A, B, C$  conjuntos. Demuestre que

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B).$$

**10. Propiedad asociativa de la diferencia simétrica.** Sean  $A, B, C$  conjuntos. Demuestre que

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

## Propiedades de las operaciones con familias de conjuntos

**11. La unión de una familia de conjuntos contiene a cada uno de los conjuntos de esta familia.** Sea  $(A_i)_{i \in J}$  una familia de conjuntos y sea  $k \in J$ . Demostrar que

$$A_k \subset \bigcup_{i \in J} A_i.$$

**12. La intersección de una familia de conjuntos está contenida en cada uno de los conjuntos de esta familia.** Sea  $(A_i)_{i \in J}$  una familia de conjuntos y sea  $k \in J$ . Demostrar que

$$\bigcap_{i \in J} A_i \subset A_k.$$

**13. La unión de una familia de conjuntos es el conjunto más pequeño entre los conjuntos que contienen a cada uno de los elementos de esta familia.** Sea  $(A_i)_{i \in J}$  una familia de conjuntos y sea  $C$  un conjunto tal que

$$\forall i \in J \quad A_i \subset C.$$

Demuestre que

$$\bigcup_{i \in J} A_i \subset C.$$

**14. La intersección de una familia de conjuntos es el conjunto más grande entre los conjuntos que están contenidos en cada uno de los elementos de esta familia.** Sea  $(A_i)_{i \in J}$  una familia de conjuntos y sea  $C$  un conjunto tal que

$$\forall i \in J \quad C \subset A_i.$$

Demuestre que

$$C \subset \bigcap_{i \in J} A_i.$$

**15. Criterio de que un conjunto contiene a la unión de una familia de conjuntos.** Sea  $(A_i)_{i \in J}$  una familia de conjuntos y sea  $B$  un conjunto. Demuestre que:

$$\bigcup_{i \in J} A_i \subset B \iff \forall i \in J \quad A_i \subset B.$$

**16. Criterio de que un conjunto está contenido en la intersección de una familia de conjuntos.** Sea  $(A_i)_{i \in J}$  una familia de conjuntos y sea  $B$  un conjunto. Demuestre que:

$$B \subset \bigcap_{i \in J} A_i \iff \forall i \in J \quad B \subset A_i.$$

**17. Propiedad distributiva de la intersección respecto a la unión.** Sea  $A$  un conjunto y sea  $(B_i)_{i \in J}$  una familia de conjuntos. Demuestre que

$$A \cap \left( \bigcup_{i \in J} B_i \right) = \bigcup_{i \in J} (A \cap B_i).$$

**18. Propiedad distributiva de la unión respecto a la intersección.** Sea  $A$  un conjunto y sea  $(B_i)_{i \in J}$  una familia de conjuntos. Demuestre que

$$A \cup \left( \bigcap_{i \in J} B_i \right) = \bigcap_{i \in J} (A \cup B_i).$$

**19. Leyes de De Morgan para familias de conjuntos.** Sea  $C$  un conjunto y sea  $(B_i)_{i \in J}$  una familia de conjuntos. Demuestre que

$$C \setminus \left( \bigcup_{i \in J} B_i \right) = \bigcap_{i \in J} (C \setminus B_i), \quad C \setminus \left( \bigcap_{i \in J} B_i \right) = \bigcup_{i \in J} (C \setminus B_i).$$

## Sucesiones monótonas de conjuntos

**20. Lema (de una sucesión creciente de conjuntos y los índices de pertenencia).**

Sea  $A_1, A_2, A_3$  una sucesión creciente de conjuntos y sea  $x \in A_k$ . Denotemos por  $J$  al conjunto de los índices  $n$  tales que  $x \in A_n$ :

$$J := \left\{ n \in \{1, 2, \dots\} : x \in A_n \right\}.$$

Demuestre que:

1.  $J \neq \emptyset$ .
2.  $J$  tiene un único elemento mínimo que denotemos por  $p$ .
3.  $p \leq k$ .
4.  $J = \{p, p+1, p+2, \dots\}$ .

**21. Teorema (sucesión de las diferencias de una sucesión creciente de conjuntos).** Sea  $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$  una sucesión creciente de conjuntos que empieza con el conjunto vacío:

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$$

Denotemos por  $D_1, D_2, D_3, \dots$  a las siguientes diferencias:

$$D_k = A_k \setminus A_{k-1} \quad (k \in \{1, 2, \dots\}).$$

Demuestre que

$$A_n = \bigcup_{k=1}^n D_k \quad (n \in \{1, 2, \dots\})$$

y

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

**22. Pasar de una sucesión arbitraria de conjuntos a una sucesión creciente y luego a una sucesión disjunta.** Sea  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de conjuntos. Para todo  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  pongamos

$$B_k := \bigcup_{n=1}^k A_n,$$

y para todo  $k \in \{1, 2, \dots\}$  pongamos

$$D_k := B_k \setminus B_{k-1}.$$

Demuestre que:

1. La sucesión  $(B_k)_{k=0}^\infty$  es creciente y  $B_0 = \emptyset$ .

2. La sucesión  $(D_k)_{k=1}^\infty$  es disjunta.

3. Para todo  $k \in \{1, 2, \dots\}$ ,

$$D_k = A_k \setminus B_{k-1}.$$

4. 
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j.$$

**23. Lema (de una sucesión decreciente de conjuntos y los índices de pertenencia).** Sean  $A_1, A_2, A_3, \dots$  una sucesión decreciente de conjuntos,  $k \in \{1, 2, \dots\}$  y  $x \in A_k$ . Denotemos por  $J$  al conjunto de los índices  $n$  tales que  $x \in A_n$ :

$$J := \left\{ n \in \{1, 2, \dots\} : x \in A_n \right\}.$$

Demuestre que:

1.  $J \neq \emptyset$ .

2. Si  $J \neq \{1, 2, \dots\}$ , entonces  $J$  tiene un único elemento máximo. Denotando este elemento por  $p$  tenemos que  $p \geq k$  y

$$J = \{1, \dots, p\}.$$

**24. Teorema (sucesión de las diferencias de una sucesión decreciente de conjuntos).** Sea  $A_1, A_2, A_3, \dots$  una sucesión decreciente de conjuntos:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$$

Denotemos por  $C$  a la intersección de esta sucesión y por  $D_1, D_2, D_3, \dots$  a las siguientes diferencias:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad D_k = A_k \setminus A_{k+1} \quad (k \in \{1, 2, \dots\}).$$

Demuestre que para todo  $n \in \{1, 2, \dots\}$

$$A_n = C \cup \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} D_k \right).$$

## Propiedades de imágenes y preimágenes de conjuntos bajo funciones

En los siguientes ejercicios  $X$  y  $Y$  son algunos conjuntos y  $f: X \rightarrow Y$  es una función.

**25. Imagen y preimagen del conjunto vacío.** Demuestre que

$$f[\emptyset] = \emptyset, \quad f^{-1}[\emptyset] = \emptyset.$$

**26. Monotonía de la preimagen.** Sean  $B_1, B_2 \subset Y$  tales que  $B_1 \subset B_2$ . Demuestre que

$$f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2].$$

**27. Monotonía de la imagen.** Sean  $A_1, A_2 \subset X$  tales que  $A_1 \subset A_2$ . Demuestre que

$$f[A_1] \subset f[A_2].$$

**28. Preimagen de la unión.** Sean  $B_1, B_2 \subset Y$ . Demuestre que

$$f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2].$$

**29. Preimagen de la intersección.** Sean  $B_1, B_2 \subset Y$ . Demuestre que

$$f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2].$$

**30. Imagen de la unión.** Sean  $A_1, A_2 \subset X$ . Demuestre que

$$f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2].$$

**31. Imagen de la intersección.** Sean  $A_1, A_2 \subset X$ . Demuestre que

$$f[A_1 \cap A_2] \subset f[A_1] \cap f[A_2].$$

**32. Imagen de la preimagen.** Sea  $B \subset Y$ . Demuestre que

$$f[f^{-1}[B]] \subset B.$$

**33. Preimagen de la imagen.** Sean  $X, Y$  conjuntos, sea  $f: X \rightarrow Y$  una función y sea  $A \subset X$ . Demuestre que

$$A \subset f^{-1}[f[A]].$$

En los siguientes ejercicios hay que construir ejemplos con contenciones estrictas.

**34. Imagen de la intersección, construir un ejemplo con la contención estricta.**

Construir conjuntos  $X, Y$ , función  $f$  y conjuntos  $A_1, A_2 \subset X$  tales que  $f[A_1 \cap A_2] \subsetneq f[A_1] \cap f[A_2]$ .

**35. Imagen de la preimagen, construir un ejemplo con la contención estricta.**

Construya conjuntos  $X, Y$ , función  $f$  y un conjunto  $B \subset Y$  tales que  $f[f^{-1}[B]] \subsetneq B$ .

**36. Preimagen de la imagen, construir un ejemplo con la contención estricta.**

Construya conjuntos  $X, Y$ , función  $f$  y un conjunto  $A \subset X$  tales que  $A \subsetneq f^{-1}[f[A]]$ .

## Imágenes y preimágenes de familias de conjuntos

En los siguientes ejercicios se supone que  $X, Y$  son conjuntos y  $f: X \rightarrow Y$  es una función.

**37. Preimagen de la unión de una familia.** Sea  $(B_i)_{i \in J}$  una familia de conjuntos tales que  $B_i \subset Y$  para todo  $i \in J$ . Demuestre que

$$f^{-1} \left[ \bigcup_{i \in J} B_i \right] = \bigcup_{i \in J} f^{-1}[B_i].$$

**38. Preimagen de la intersección de una familia.** Sea  $(B_i)_{i \in J}$  una familia de conjuntos tales que  $B_i \subset Y$  para todo  $i \in J$ . Demuestre que

$$f^{-1} \left[ \bigcap_{i \in J} B_i \right] = \bigcap_{i \in J} f^{-1}[B_i].$$

**39. Imagen de la unión de una familia.** Sea  $(A_i)_{i \in J}$  una familia de conjuntos tales que  $A_i \subset X$  Demuestre que

$$f \left[ \bigcup_{i \in J} A_i \right] = \bigcup_{i \in J} f[A_i].$$

**40. Imagen de la intersección de una familia.** Sea  $(A_i)_{i \in J}$  una familia de conjuntos tales que  $A_i \subset X$  para todo  $i \in J$ . Demuestre que

$$f \left[ \bigcap_{i \in J} A_i \right] \subset \bigcap_{i \in J} f[A_i].$$

**41. Imagen de la intersección de una familia: construir ejemplo con la contención estricta.** Constuya algunos conjuntos  $X, Y$ , una función  $f: X \rightarrow Y$  y una familia de conjuntos  $(A_i)_{i \in J}$  tales que  $A_i \subset X$  para todo  $i \in J$  y

$$f \left[ \bigcap_{i \in J} A_i \right] \subsetneq \bigcap_{i \in J} f[A_i].$$

## Intervalos del eje real

42. Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Demuestre que

$$(a, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ a + \frac{1}{n}, +\infty \right).$$

43. Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Demuestre que

$$[a, +\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( a - \frac{1}{n}, +\infty \right).$$

44. Sea  $b \in \mathbb{R}$ . Demuestre que

$$(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( -\infty, b - \frac{1}{n} \right].$$

45. Sea  $b \in \mathbb{R}$ . Demuestre que

$$(-\infty, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( -\infty, b + \frac{1}{n} \right].$$

46. Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Demuestre que

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right).$$

## Estructura de subconjuntos abiertos del eje real

47. Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Escriba la definición de la topología inducida por  $d$ .

Definimos la topología en  $\mathbb{R}$  por medio de la distancia común  $d(x, y) := |x - y|$ .

48. **Lema.** Sea  $A$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}$ . Definimos en  $A$  la relación binaria  $\overset{A}{\sim}$  mediante la siguiente regla:

$$x \overset{A}{\sim} y \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad [x, y] \cup [y, x] \subset A.$$

Demuestre que  $\overset{A}{\sim}$  es una relación de equivalencia.

49. **Lema.** Sea  $A$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}$  y sea  $x \in A$ . Denotemos por  $[x]_A$  a la clase de equivalencia de  $x$  respecto a la relación binaria  $\overset{A}{\sim}$ :

$$[x]_A = \{y \in A : x \overset{A}{\sim} y\}.$$

Pongamos

$$a_x := \inf\{y \in (-\infty, x) : (y, x) \subset A\}, \quad b_x := \sup\{z \in (x, +\infty) : (x, z) \subset A\}.$$

Demuestre que

$$[x]_A = (a_x, b_x).$$

Sugerencia: 1) demostrar que  $a_x < x < b_x$ , 2) en la parte  $[x]_A \subset (a_x, b_x)$  usar que si  $y \overset{A}{\sim} x$ , entonces  $[y]_A = [x]_A$ ,  $a_y = a_x$ ,  $b_y = b_x$ , y aplicar el inciso 1); 3) en la parte  $(a_x, b_x) \subset [x]_A$  usar lemas sobre la comparación del sup e inf con un número.

50. **Teorema (estructura de subconjuntos abiertos del eje real).** Demuestre que todo conjunto abierto  $A$  en  $\mathbb{R}$  se puede representar como una unión finita o numerable de intervalos abiertos, disjuntos entre si.

## Eje real extendido

**51. Definición de la topología en el eje real extendido.** Denotemos por  $\mathcal{S}$  al conjunto de los intervalos que tienen una de las siguientes tres formas (con  $a, b \in \mathbb{R}$ ):

$$(a, +\infty), \quad (a, b), \quad [-\infty, b).$$

Demuestre que para cualesquiera  $P, Q \in \mathcal{S}$  se tiene que  $P \cap Q \in \mathcal{S}$ . Explique cómo se define la topología en  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**52.** Demuestre que el conjunto  $[3, +\infty)$  no es abierto ni cerrado en  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**53. ¿Es la adición una operación continua en  $[0, +\infty]$ ?** Determine si la función  $f: [0, +\infty] \times [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$  definida mediante la siguiente regla, es continua o no.

$$f(x, y) := \begin{cases} x + y, & \text{si } x, y \in [0, +\infty); \\ +\infty, & \text{si } x = +\infty \vee y = +\infty. \end{cases}$$

**54. ¿Es la multiplicación una operación continua en  $[0, +\infty]$ ?** Determine si la función  $g: [0, +\infty] \times [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$  definida mediante la siguiente regla, es continua o no.

$$g(x, y) := \begin{cases} xy, & \text{si } x, y \in [0, +\infty), \\ 0, & \text{si } x = 0, y = +\infty, \\ 0, & \text{si } x = +\infty, y = 0, \\ +\infty, & \text{si } x = y = +\infty. \end{cases}$$

## Supremo e ínfimo de un conjunto

**55. Comparación del supremo con un número.** Sean  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  y  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Entonces

$$\sup(A) \leq b \iff \forall a \in A \quad a \leq b,$$

y

$$\sup(A) \geq b \iff \forall u < b \quad \exists a \in A \quad a > u.$$

**56. Criterio del supremo en términos de cuantificadores y desigualdades.** Sean  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  y  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Entonces

$$\sup(A) = b \iff \begin{cases} \forall a \in A \quad a \leq b, \\ \forall u < b \quad \exists a \in A \quad a > u. \end{cases}$$

Aquí la llave sirve para formar un *sistema* de dos condiciones unidas con la operación lógica  $\wedge$ .

**57. Comparación del ínfimo con un número.** Sean  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  y  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Entonces

$$\inf(A) \geq b \iff \forall a \in A \quad a \geq b,$$

y

$$\inf(A) \leq b \iff \forall u > b \quad \exists a \in A \quad a < u.$$

**58. Criterio del ínfimo en términos de cuantificadores y desigualdades.** Sean  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  y  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Entonces

$$\inf(A) = b \iff \begin{cases} \forall a \in A \quad a \geq b, \\ \forall u > b \quad \exists a \in A \quad a < u. \end{cases}$$

**59. Monotonía del supremo.** Sean  $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$  tales que  $A \subset B$ . Demuestre que

$$\sup A \leq \sup B.$$

**60. Monotonía del ínfimo.** Sean  $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$  tales que  $A \subset B$ . Demuestre que

$$\inf A \geq \inf B.$$

**61. Supremo de la unión de dos conjuntos.** Sean  $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Demuestre que

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

**62. Ínfimo de la unión de dos conjuntos.** Sean  $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Demuestre que

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}.$$

**63. Supremo de un múltiplo positivo de un conjunto.** Sean  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  y  $\lambda \in (0, +\infty)$ . Demuestre que

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A).$$

**64. Ínfimo de un múltiplo positivo de un conjunto.** Sean  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  y  $\lambda \in (0, +\infty)$ . Demuestre que

$$\inf(\lambda A) = \lambda \inf(A).$$

**65. Supremo del conjunto opuesto.** Sea  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Demuestre que

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

**66. Ínfimo del conjunto opuesto.** Sea  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Demuestre que

$$\inf(-A) = -\sup(A).$$

**67. Supremo de la suma de dos conjuntos.** Sean  $A, B \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$ . Demuestre que

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

**68. Ínfimo de la suma de dos conjuntos.** Sean  $A, B \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$ . Demuestre que

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B).$$

## Límite superior y límite inferior de una sucesión

**69. Límite de una sucesión creciente acotada.** Sea  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathbb{R}$  que es creciente y acotada superiormente, esto es,  $a_n \leq a_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n < +\infty$ .

Denotemos al supremo de esta sucesión por  $b$ :

$$b := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b.$$

**70. Límite de una sucesión creciente no acotada.** Sea  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathbb{R}$  que es creciente y no acotada superiormente, esto es,  $a_n \leq a_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = +\infty.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

**71. Límite de una sucesión decreciente acotada.** Sea  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathbb{R}$  que es decreciente y acotada inferiormente, esto es,  $a_{n+1} \leq a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n > -\infty$ . Denotemos al ínfimo de esta sucesión por  $b$ :

$$b := \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b.$$

**72. Límite de una sucesión decreciente no acotada.** Sea  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathbb{R}$  que es decreciente y no acotada inferiormente, esto es,  $a_{n+1} \leq a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = -\infty.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

**73. Comparación del límite superior con un número.** Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\overline{\mathbb{R}}$  y sea  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b \iff \forall c > b \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad x_n < c,$$

y

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \geq b \iff \forall a < b \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad x_n > a.$$

**74. Criterio del límite superior en términos de cuantificadores y desigualdades.**

Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\overline{\mathbb{R}}$  y sea  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = b \iff \begin{cases} \forall c > b \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad x_n < c, \\ \forall a < b \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad x_n > a. \end{cases}$$

Aquí la llave sirve para formar un *sistema* de dos condiciones unidas con la operación lógica  $\wedge$ .

**75. Comparación del límite inferior con un número.** Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\overline{\mathbb{R}}$  y sea  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Enuncie y demuestre resultados similares a 73 para  $\limsup$ .

**76. Criterio del límite inferior en términos de cuantificadores y desigualdades.**

Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\overline{\mathbb{R}}$  y sea  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Enuncie y demuestre un resultado similar a 73 para  $\liminf$ .

**77. Existe un límite si, y sólo si, el límite inferior coincide con el límite superior.**

Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\overline{\mathbb{R}}$ . Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) existe un  $y \in \overline{\mathbb{R}}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ .

(b)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**78. Límite superior de la suma de sucesiones.** Sean  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesiones en  $\overline{\mathbb{R}}$ . Demuestre que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

**79.** Dé un ejemplo de sucesiones  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tales que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) < \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

**80.** Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\overline{\mathbb{R}}$ . Demuestre que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

**81.** Sean  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  algunas sucesiones en  $\overline{\mathbb{R}}$  tales que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq b_n.$$

Demuestre que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

y

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.$$