Espacios normados,
el primer conocimiento

Problemas para examen

Índice

En todos estos problemas suponemos que los espacios vectoriales son complejos. La mayor parte de esta teoría es válida también para espacios reales.

1. Definición de espacios normados y de Banach

1 Ejercicio (definición del espacio normado, definición del espacio de Banach)**.** Sea V un espacio vectorial complejo. Escriba la definición de una *norma* en V.

2 Ejercicio (la métrica asociada a una norma)**.** Sea V un espacio normado. Definimos $d\colon V^2 \to [0, +\infty)$ mediante la regla

$$d(u, v) := \|u - v\|.$$

Demuestre que d es una métrica.

3 Ejercicio (definición de espacio de Banach)**.** ¿Cuándo un espacio normado se llama *de Banach*? Escriba la definición.

4 Ejercicio (criterio de completitud de espacios normados)**.** Sea V un espacio normado. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) V es normado;

(b) para cada sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en V, si $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\| < +\infty$, entonces la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ converge en V, esto es, existe un b en V tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| b - \sum_{k=1}^{n} a_k \right\| = 0.$$

Sugerencia: para demostrar que (b) implica (a), es cómodo usar el criterio de espacios métrico completos en términos de sucesiones regulares de Cauchy.

Conjuntos convexos, el primer conocimiento

Sea V un espacio vectorial complejo.

5 Definición (conjunto convexo)**.** Sea $A \subseteq V$. Decimos que A es *convexo* si para cualesquiera u, v en A y cualquier λ en $[0, 1]$

$$(1 - \lambda)u + \lambda v \in A.$$

6 Definición (envoltura convexa de un conjunto)**.** Sea $A \subseteq V$. Denotemos por $\operatorname{conv}(A)$ al conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de A. En otras palabras $v \in \operatorname{conv}(A)$ si, y solo si, existe m en $\mathbb{N}$, existen $u_1, \ldots, u_m$ en A y existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ tales que

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1, \qquad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k = v.$$

7 Ejercicio. Sea $A \subseteq V$. Demuestre que $A \subseteq \operatorname{conv}(A)$.

8 Ejercicio (la envoltura convexa de un conjunto convexo coincide con este conjunto)**.** Sea A un subconjunto convexo de V. Demuestre que $\operatorname{conv}(A) = A$.

9 Ejercicio (la envoltura convexa de cualquier conjunto es un conjunto convexo)**.** Sea $A \subseteq V$. Demuestre que $\operatorname{conv}(A)$ es un conjunto convexo.

10 Ejercicio (criterio de convexidad en términos de la envoltura convexa)**.** Sea $A \subseteq V$. Demuestre que A es convexo si, y solo si, $\operatorname{conv}(A) = A$.

11 Ejercicio. Sea $A \subseteq V$ y sea C un subconjunto convexo de V tal que $A \subseteq C$. Demuestre que $\operatorname{conv}(A) \subseteq C$.

12 Ejercicio (descripción de la envoltura convexa en términos de conjuntos convexos)**.** Sea $A \subseteq V$. Demuestre que $\operatorname{conv}(A)$ es el más pequeño entre todos los conjuntos convexos que contienen al conjunto A.

2. Bolas en espacios normados

Sea V un espacio vectorial complejo normado.

13 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Demuestre que la bola $B(a, r)$ es convexa.

14 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Demuestre que

$$B(a, r) = a + rB(0, 1).$$

15 Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demuestre que

$$\lambda B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda| r).$$

16 Ejercicio. Sean $a_1, a_2 \in V$ y $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2.$$

Demuestre que $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \neq \varnothing$. Sugerencia: considere el punto

$$\frac{r_2}{r_1 + r_2} a_1 + \frac{r_1}{r_1 + r_2} a_2.$$

17 Ejercicio. Sean $r_1, r_2 > 0$. Demuestre que

$$B(0, r_1) + B(0, r_2) = B(0, r_1 + r_2).$$

18 Ejercicio. Sean $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$. Demuestre que

$$B(a_1, r_1) + B(a_2, r_2) = B(a_1 + a_2, r_1 + r_2).$$

3. El teorema de Riesz sobre la bola unitaria

19 Ejercicio (el lema de Riesz sobre un vector en la esfera unitaria, lejano del subespacio cerrado dado)**.** Sea V un espacio normado, sea W un subespacio cerrado de V tal que $W \neq V$, y sea $r \in (0, 1)$. Demuestre que existe v en V tal que $\|v\| = 1$ y $d(v, W) \geq r$.

20 Ejercicio (el teorema de Riesz sobre no compacidad de la bola unitaria en espacios normados de dimensión infinita)**.** Sea V un espacio normado de dimensión infinita. Demuestre que la bola unitaria cerrada $C(0_V, 1)$ no es totalmente acotada. Como consecuencia, la bola cerrada $C(0_V, 1)$ no es compacta.

4. Comparación de normas

Sea V un espacio vectorial complejo.

21 Definición. Sean N_1 y N_2 dos normas en un espacio vectorial V. Decimos que N_1 *está dominada* (o *se mayoriza*) por N_2 y escribimos $N_1 \preceq N_2$ si existe un número $C > 0$ tal que $N_1(v) \leq C N_2(v)$ para cada v en V.

22 Ejercicio (propiedad transitiva y propiedad reflexiva de la comparación de normas)**.** Sean N_1, N_2, N_3 normas en un espacio vectorial V.

- Muestre que si $N_1 \preceq N_2$ y $N_2 \preceq N_3$, entonces $N_1 \preceq N_3$.

- Muestre que $N_1 \preceq N_1$.

23 Ejercicio (criterio de comparación de normas)**.** Sean N_1 y N_2 dos normas en un espacio vectorial V. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $N_1 \preceq N_2$;

(b) existe $\delta > 0$ tal que $B_2(0, \delta) \subseteq B_1(0, 1)$;

(c) para cada $r_1 > 0$ existe $r_2 > 0$ tal que $B_2(0, r_2) \subseteq B_1(0, r_1)$;

(d) $\tau_1 \subseteq \tau_2$, donde τ_1 y τ_2 son las topologías inducidas por las normas N_1 y N_2, respectivamente.

24 Ejercicio. Escriba la definición de normas equivalentes en un espacio vectorial complejo. Demuestre que esta relación realmente es transitiva, reflexiva y simétrica.

25 Ejercicio. Usando el resultado del Ejercicio 23, muestre que dos normas son equivalentes si, y solo si, inducen la misma topología.

5. Desigualdades de Bernoulli y de Young

26 Ejercicio (criterio de monotonía de una función, en términos de su derivada, repaso)**.** Sea A un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que f es continua en A y derivable en $\operatorname{int}(A)$. Demuestre que f es creciente en A (en el sentido no estricto) si, y solo si, $f'(x) \geq 0$ para cada x en $\operatorname{int}(A)$.

27 Ejercicio (condición suficiente para la monotonía estricta de una función, en términos de su derivada, repaso)**.** Sea A un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que f es continua en A y derivable en $\operatorname{int}(A)$. Supongmaos que $f'(x) > 0$ para cada x en $\operatorname{int}(A)$. Demuestre que f es estrictamente creciente en A.

28 Ejercicio (desigualdad de Bernoulli para exponentes no enteros)**.** Sean $a \geq 0$, $b \geq 1$. Demuestre que

$$(1 + a)^b \geq 1 + ab.$$

Sugerencia: demuestre que la función

$$f(x) := (1+x)^b - 1 - bx$$

es creciente y $f(0) = 0$.

29 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Bernoulli para exponentes no enteros)**.** Sea $b > 1$ y sea $a \geq 0$ tal que

$$(1+a)^b = 1 + ab.$$

Demuestre que $a = 0$.

30 Ejercicio (desigualdad de Young)**.** Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Demuestre que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

31 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Young)**.** Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Supongamos que

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demuestre que $a^p = b^q$.

6. Desigualdades de Hölder y de Minkowski para sucesiones

32 Ejercicio (desigualdad de Hölder para sucesiones con entradas no negativas)**.** Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [0, +\infty]^{\mathbb{N}}$. Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^q \right)^{1/q}. \tag{1}$$

33 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Hölder)**.** Sean $p, q, (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales como en el Ejercicio 32. Supongamos que ambos lados de la fórmula (1) son finitos. ¿Cuándo se cumple la igualdad en (1)?

34 Ejercicio (desigualdad de Minkowski para sucesiones con entradas no negativas)**.** Sea $p \in (1, +\infty)$ y sean $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [0, +\infty]^{\mathbb{N}}$. Demuestre que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^p\right)^{1/p}. \tag{2}$$

35 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Minkowski)**.** Supongamos que se cumplen las condiciones del Ejericio 34, y además el lado derecho de (2) es finito. Determine cuándo se cumple la igualdad en (34).

7. Normas en $\mathbb{C}^n$

Suponemos que $n \in \mathbb{N}$.

36 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Escriba la fórmula para la norma $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{C}^n$. Justifique que $\|\cdot\|_p$ es una norma.

37 Ejercicio. Escriba la fórmula para la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{C}^n$. Justifique que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma. Demuestre que para cada a en $\mathbb{C}^n$

$$\|a\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|a\|_p.$$

38 Ejercicio. Muestre de manera directa que las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes.

39 Ejercicio. Sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_n > 0$. Definimos $N\colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$ mediante la regla

$$N(a) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \gamma_k |a_k|.$$

Muestre que N es una norma. Muestre de manera directa que N es equivalente a $\|\cdot\|_1$.

40 Ejercicio. Definimos $N\colon \mathbb{C}^3 \to [0, +\infty)$ mediante la regla

$$N(a) \coloneqq \max\{|a_1| + 5|a_2|\} + 4|a_3|.$$

Demuestre que N es una norma.

41 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty]$, $a \in \mathbb{C}^n$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Demuestre que

$$|a_k| \le \|a\|_p. \tag{3}$$

42 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty]$, $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{C}^n$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\|a_m - b\|_p \to 0$ cuando $m \to \infty$;

(b) para cada k en $\{1, \ldots, n\}$, $\lim_{m \to \infty} a_{m,k} = b_k$.

43 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty]$, $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}^n$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}^n$;

(b) para cada k en $\{1, \ldots, n\}$, $(a_{m,k})_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

44 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty]$. Muestre que el espacio $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$ es completo.

45 Ejercicio. Sea $N\colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$ una norma. Dotamos $\mathbb{C}^n$ de la topología inducida por la norma euclideana $\|\cdot\|_2$. Pongamos

$$C := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} N(e_k)^2}.$$

Muestre que para cada a en $\mathbb{C}^n$

$$N(a) \le C\,\|a\|_2.$$

Como consecuencia, muestre que la función N es Lipschitz continua.

46 Ejercicio. Muestre que cualesquiera dos normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes.

47 Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio de V de dimensión finita. Demuestre que W es cerrado en V.

8. Espacios de sucesiones

48 Ejercicio. Recuerde la definición del espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ para p en $[1, +\infty)$ y para $p = +\infty$.

49 Ejercicio. Para cada m en $\mathbb{N}$ denotemos por e_m a la sucesión

$$e_m := (\delta_{m,k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

50 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty]$, $a \in \ell^p(\mathbb{N})$, $k \in \mathbb{N}$. Muestre que

$$|a_k| \le \|a\|_p. \tag{4}$$

51 Ejercicio (la convergencia en $\ell^p(\mathbb{N})$ implica la convergencia por componentes)**.** Sean $p \in [1, +\infty]$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\ell^p(\mathbb{N})$, $b \in \ell^p(\mathbb{N})$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n - b\|_p = 0.$$

Muestre que para cada k en $\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = b_k.$$

52 Ejercicio (la convergencia en $\ell^p(\mathbb{N})$ no es equivalente a la convergencia por componentes)**.** Construya una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\ell^p(\mathbb{N})$ tal que para cada k en $\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0,$$

pero la sucesion $\|a_n\|_p$ no converge a 0.

53 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty]$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\ell^p(\mathbb{N})$, $k \in \mathbb{N}$. Muestre que $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

54 Ejercicio. Muestre que los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$, con p en $[1, +\infty]$, son completos.

55 Ejercicio. Escriba la definición del espacio $c(\mathbb{N})$. Muestre que $c(\mathbb{N})$ es un subespacio cerrado de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Como consecuencia, $c(\mathbb{N})$ es completo.

56 Ejercicio. Escriba la definición del espacio $c_0(\mathbb{N})$. Muestre que $c_0(\mathbb{N})$ es un subespacio cerrado de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Como consecuencia, $c_0(\mathbb{N})$ es completo.

57 Ejercicio. Sean $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$, $p_1 < p_2$. Muestre que $\ell^{p_1}(\mathbb{N}) \subsetneq \ell^{p_2}(\mathbb{N})$.

58 Ejercicio (sucesiones finitas)**.**

$$\mathcal{F}(\mathbb{N}) := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \colon \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \quad a_n = 0\}.$$

Muestre que $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ es un subconjunto de $\ell^p(\mathbb{N})$ para cada p en $[1, +\infty]$.

59 Ejercicio (la cerradura de conjunto de las sucesiones finitas)**.** Muestre que si $p \in [1, +\infty)$, entonces $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ es un subconjunto denso en $\ell^p(\mathbb{N})$. Encuentre la cerradura del conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ en el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

60 Ejercicio (sucesiones finitas con componentes complejas racionales)**.** Denotemos por $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})$ al subconjunto de $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ que consiste de las sucesiones finitas con valores en $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q}$. Demuestre que el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})$ es numerable.

61 Ejercicio (las coordenadas canónicas son funcionales continuos)**.** Sea $m \in \mathbb{N}$. Definimos $\varphi_m \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\varphi_m(a) \coloneqq a_m.$$

62 Ejercicio (el ladrillo de Hilbert, también se conoce como el cubo de Hilbert)**.** Consideremos el siguiente conjunto de sucesiones:

$$C \coloneqq \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \colon \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \le a_k \le \frac{1}{k} \right\}.$$

Muestre que C es un subconjunto de $\ell^2(\mathbb{N})$. Muestre que

$$C = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \varphi_m^{-1}\left[\, [0, 1/m] \,\right],$$

donde φ_m es el funcional del Ejercicio 61. Muestre que C es un conjunto cerrado. Muestre que C es totalmente acotado. Muestre que C es compacto.

9. Algunos espacios de funciones acotadas

63 Ejercicio. Sea X un conjunto. Denotemos por $B(X, \mathbb{C})$ al espacio de las funciones acotadas $X \to \mathbb{C}$, con operaciones lineales punto a punto:

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (\alpha f)(x) \coloneqq \alpha f(x),$$

y con la norma-supremo:

$$\|f\| \coloneqq \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Muestre que $B(X, \mathbb{C})$ es un espacio de Banach.

64 Ejercicio (el espacio de funciones acotadas y continuas)**.** Sea X un espacio métrico (o topológico). Recordemos que el espacio $B(X)$ está definido en el Ejercicio 63. Denotemos por $C_b(X)$ al subconjunto del espacio $B(X)$ que consiste de la todas las funciones acotadas y continuas $X \to \mathbb{C}$. Muestre que $C_b(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$. Al considerar $C_b(X)$ como un espacio normado con las operaciones lineales y la norma inducidas de $B(X)$, obtenemos un espacio de Banach.

65 Ejercicio (el espacio de funciones acotadas y uniformemente continuas)**.** Sea X un espacio métrico. Denotemos por $C_{b,u}(X)$ al subconjunto del espacio $B(X)$ que consiste de la todas las funciones acotadas y uniformemente continuas $X \to \mathbb{C}$. Muestre que $C_{b,u}(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$. Al considerar $C_{b,u}(X)$ como un espacio normado con las operaciones lineales y la norma inducidas de $B(X)$, obtenemos un espacio de Banach.

66 Ejercicio. Sea $C^1[0,1]$ el conjunto de funciones continuas y continuamente derivables $[0,1] \to \mathbb{C}$, con la norma

$$\|f\|_{C^1[0,1]} \coloneqq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

Muestre que $C^1[0,1]$ es un espacio de Banach.

10. Bases de Schauder (este tema no se incluye en el examen)

67 Definición. Sea V un espacio normado complejo. Una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores en V se llama *base de Schauder* si para cada x en V existe una única sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n b_n - v \right\| = 0.$$

68 Ejercicio. Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en V. Muestre que la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es linealmente independiente, esto es, para cada m en $\mathbb{N}$ y cualquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ en $\mathbb{C}$, si

$$\sum_{n=1}^{m} \alpha_n b_n = 0_V,$$

entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$.

69 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Muestre que $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder en $\ell^p(\mathbb{N})$.

70 Ejercicio. Muestre que la sucesión $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder en $c_0(\mathbb{N})$.

71 Ejercicio. Encuentre una base de Schauder en $c(\mathbb{N})$.

72 Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo con una base de Schauder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Muestre que V es separable.

11. Algunos espacios separables y no separables

Denotemos por $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ al espacio vectorial de sucesiones complejas de soporte finito y por $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})$ al espacio vectorial de sucesiones de soporte finito con entradas complejo-racionales.

73 Ejercicio. Demuestre que el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})$ es numerable.

74 Ejercicio. Sea X un espacio métrico, Y un subespacio de X (considerado con la distancia inducida), D un subconjunto denso en Y. Supongamos además que el conjunto Y es denso en X. Demuestre que D es denso en X. Se recomienda trabajar con bolas.

75 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Dotamos el espacio $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ de la norma $\|\cdot\|_p$. Demuestre que el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})$ es denso en el espacio $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, dotado de la norma $\|\cdot\|_p$.

76 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Muestre que el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ es un subconjunto denso del espacio $\ell^p(\mathbb{N})$.

77 Ejercicio. Dotamos el espacio $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ de la norma-supremo $\|\cdot\|_\infty$. Demuestre que el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})$ es denso en el espacio $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, dotado de la norma $\|\cdot\|_\infty$.

78 Ejercicio. Demuestre que el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ es un subconjunto denso del espacio $c_0(\mathbb{N})$.

En la solución de los siguientes dos ejercicios se pueden usar resultados sobre bases de Schauder o resultados sobre $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

79 Ejercicio. Muestre que los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$ con $p \in [1, +\infty)$ son separables.

80 Ejercicio. Muestre que el espacio $c_0(\mathbb{N})$ es separable.

En los siguientes dos ejercicios se trata de espacios no separables.

81 Ejercicio. Sean V un espacio vectorial normado, $\eta > 0$ y S un subconjunto no numerable de V tal que para cualesquier a, b en S, si $a \neq b$, entonces $\|a - b\| \geq \eta$. Demuestre que V no es separable.

82 Ejercicio. Demuestre que el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es no separable.

12. Productos de dos espacios normados

83 Ejercicio. Sean V y W dos espacios normados. En el producto $V \times W$ definimos operaciones lineales por componentes y la norma

$$\|(a,b)\| \coloneqq \|a\|_V + \|b\|_W.$$

Es fácil ver que $V \times W$ es un espacio normado. Demuestre que $V \times W$ es completo si, y sólo si, V y W son completos.

13. Espacios cocientes de espacios normados (este tema no se incluye en el examen)

84 Ejercicio. Sea V un espacio vectorial y sea W un subespacio de V. Explique la definición del espacio vectorial V/W.

85 Ejercicio. Sean V un espacio vectorial y W un subespacio cerrado de V. Explique cómo se define la norma en V/W y demuestre que realmente es una norma.

86 Ejercicio. Sean V un espacio vectorial y W un subespacio cerrado de V. Definimos $Q\colon V \to V/W$ mediante la regla $Q(a) \coloneqq a + W$. Es fácil ver que Q es una transformación lineal. Muestre que Q es continua y abierta.

87 Ejercicio. Sean V un espacio de Banach y W un subespacio cerrado de V. Demuestre que V/W es un espacio de Banach. Se recomienda usar el resultado del Ejercicio 4.

88 Ejercicio. Demuestre que el espacio $c(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})$ es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$. Se recomienda construir una transformación lineal $F\colon \mathbb{C} \to c(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})$ y mostrar que es un isomorfismo isométrico.

89 Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal. Supongamos que $\ker(f)$ es un subespacio cerrado de V. Demuestre que el funcional f es continuo.