# Espacios métricos

**Problemas para examen**

## La unión de una colección de conjuntos, repaso

Usamos la frase “colección de conjuntos” como un sinónimo de la frase “conjunto de conjuntos”. No es lo mismo que una familia de conjuntos.

**1 Definición.** Sea $X$ un conjunto y sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de $X$, esto es, $\mathcal{A} \subseteq 2^X$. La unión de la colección $\mathcal{A}$ se denota por $\cup\mathcal{A}$ y se define mediante la siguiente regla:

$$\cup\mathcal{A} \;\coloneqq\; \big\{x \in X\colon \quad \exists B \in \mathcal{A} \quad x \in B\big\}.$$

**2 Ejercicio.** Sea $X$ un conjunto y sea $Y \subseteq X$. Pongamos $\mathcal{A} \coloneqq \{Y\}$. Encontrar $\cup\mathcal{A}$.

**3 Ejercicio.** Sea $X$ un conjunto. Pongamos $\mathcal{A}$ la colección vacía: $\mathcal{A} \coloneqq \varnothing$. Encontrar $\cup\mathcal{A}$.

**4 Ejercicio.** Sea $\mathcal{A} \subseteq X$ y sea $Y \in X$. Supongamos que

$$\forall B \in \mathcal{A} \qquad B \subseteq Y.$$

Demostrar que $\cup\mathcal{A} \subseteq Y$.

## Espacios topológicos, el interior y la cerradura

**5 Ejercicio.** Escribir la definición de topología (y del espacio topológico).

**6 Ejercicio.** Escribir la definición de conjuntos cerrados en un espacio topológico.

**7 Ejercicio.** Enunciar y demostrar las propiedades principales de los conjuntos cerrados en un espacio topológico.

**8 Ejercicio** (definición local y global del interior de un conjunto en un espacio topológico)**.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Definimos el *interior* de $A$ de la siguiente manera:

$$\operatorname{int}(A) \coloneqq \{x \in X\colon\ \exists U \in \tau\ \ (x \in U\ \ \wedge U \subseteq A)\}\,.$$

Demostrar que $\operatorname{int}(A) \subseteq A$ y

$$\operatorname{int}(A) = \cup\{V \in \tau\colon\ \ V \subseteq A\}.$$

Demostrar que $\operatorname{int}(A)$ es el conjunto más grande entre todos los conjuntos abiertos contenidos en $A$.

**9 Ejercicio** (propiedades de la operación int)**.** Demostrar las siguientes propiedades de la operación int.

1. $\operatorname{int}(X) = X$.

2. Para cada $A$ en $2^X$, $\operatorname{int}(A) \subseteq A$.

3. Para cualesquiera $A$, $B$ en $2^X$, $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$.

4. Para cada $A$ en $2^X$, $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$.

**10 Ejercicio** (definión local y global de la cerradura de un conjunto en un espacio topológico)**.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Definimos la *cerradura* de $A$ de la siguiente manera:

$$\operatorname{cl}(A) \coloneqq \{x \in X\colon\ \forall U \in \tau\ (x \in U) \Rightarrow (A \cap U \neq \varnothing)\}.$$

Demostrar que $A \subseteq \operatorname{cl}(A)$. Demostrar que $\operatorname{cl}(A) = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)$. Demostrar que

$$\operatorname{cl}(A) = \cap\{B \in 2^X\colon\ \ A \subseteq B\ \ \wedge\ \ X \setminus B \in \tau\}.$$

Demostrar que $\operatorname{cl}(A)$ es el más pequeño entre todos los conjuntos cerrados que contienen al conjunto $A$.

**11 Ejercicio** (propiedades de la operación cl)**.** Demostrar las siguientes propiedades de la operación cl.

1. $\operatorname{cl}(\varnothing) = \varnothing$.

2. Para cada $A$ en $2^X$, $A \subseteq \operatorname{cl}(A)$.

3. Para cualesquiera $A$, $B$ en $2^X$, $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl}(A) \cup \operatorname{cl}(B)$.

4. Para cada $A$ en $2^X$, $\operatorname{cl}(\operatorname{cl}(A)) = \operatorname{cl}(A)$.

## Funciones continuas

**12 Definición.** Sean $(X, \tau_X)$, $(Y, \tau_Y)$ espacios topológicos, $f\colon X \to Y$. Decimos que $f$ es *continua* y escribimos $f \in C(X, Y)$ si para cada $B$ en $\tau_Y$ se cumple $f^{-1}[B] \in \tau_X$.

**13 Ejercicio.** Sean $(X, \tau_X)$, $(Y, \tau_Y)$ espacios topológicos, $f\colon X \to Y$, $a \in X$. Escribir la definición de la continuidad de $f$ en el punto $a$.

**14 Ejercicio** (continuidad local y global)**.** Sean $(X, \tau_X)$, $(Y, \tau_Y)$ espacios topológicos, $f\colon X \to Y$. Demostrar que $f$ es continua si, y solo si, para cada $a$ en $X$ la función $f$ es continua en $a$.

**15 Ejercicio.** Sean $(X, \tau_X)$, $(Y, \tau_Y)$ espacios topológicos, $f\colon X \to Y$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f$ es continua;

(b) para cada $Z \subseteq Y$, si $Y \setminus Z \in \tau_Y$, entonces $X \setminus f^{-1}[Z] \in \tau_X$.

**16 Ejercicio** (descripción de la continuidad en términos de la operación int)**.** Sean $(X, \tau_X)$, $(Y, \tau_Y)$ espacios topológicos, $f\colon X \to Y$. Demostrar que $f$ es continua si, y solo si, para cada $B$ en $Y$ se cumple

$$f^{-1}[\operatorname{int}(B)] \subseteq \operatorname{int}(f^{-1}[B]).$$

**17 Ejercicio** (descripción de la continuidad en términos de la operación cl)**.** Sean $(X, \tau_X)$, $(Y, \tau_Y)$ espacios topológicos, $f\colon X \to Y$. Demuestre que $f$ es continua si, y solo si, para cada $B$ en $Y$ se cumple

$$\operatorname{cl}(f^{-1}[B]) \subseteq f^{-1}[\operatorname{cl}(B)].$$

## Espacios métricos: definición y ejemplos

**18 Ejercicio.** Escribir la definición de pseudométrica, la definición de métrica, la definición del espacio pseudométrico, la definición del espacio métrico.

**19 Ejercicio.** Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo. Demostrar que la función

$$d(a,b) := \|a-b\|$$

es una métrica.

**20 Ejercicio** (subespacio de un espacio métrico)**.** Sea $(X,d)$ un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Denotamos por $d|_{Y\times Y}$ la restricción de la función $d$ al dominio $Y \times Y$. Demostrar que $d|_{Y\times Y}$ es una distancia en $Y$. En esta situación se dice que $Y$ se considera como un *subespacio métrico* de $X$.

**21 Ejercicio.** Sea $(G,E)$ grafo no dirigido. Los elementos de $G$ se llaman *vértices* y los elementos de $E$ se llaman *aristas*. Recordemos $E$ es un subconjunto de $2^G$ tal que los elementos de $E$ son conjuntos de dos elementos. Supongamos que $G$ es un grafo conexo: entre cualquier par de vértices hay un camino. La distancia entre dos vértices de $G$ se define como el mínimo de las longitudes de los caminos que unen estos dos vértices. Escriba esta definición de manera formal usando el siguiente plan.

- Sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $(a_0,\ldots,a_m) \in X^{m+1}$. ¿Cuándo se dice que $(a_0,\ldots,a_m)$ es un camino en $(X,E)$?
- Sea $(a_0,\ldots,a_m)$ un camino en $(X,E)$. ¿Cuál es la longitud de este camino? Aquí pensamos que cada arista tiene "peso" ("longitud") 1. De manera más general, se pueden considerar grafos donde cada arista tiene un peso definido (un número positivo).
- Sea $(a_0,\ldots,a_m)$ un camino en $(X,E)$ y sean $u,v \in X$. ¿Cuándo se dice que el camino $(a_0,\ldots,a_m)$ une los vértices $u,v$?
- Sean $u,v \in X$. Denotemos por $P(X,E,u,v)$ al conjunto de todos los caminos en $(X,E)$ que unen $u$ y $v$. Escribir de manera formal la definición de $P(X,E,u,v)$.
- Dados $u,v$ en $X$, definir de manera formal $d(u,v)$.
- Demostrar que $d$ es una distancia.

**22 Ejercicio** (distancia de "vuelos a través de la capital")**.** Definimos $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty)$ mediante la regla

$$\rho(a,b) := \begin{cases} 0, & a = b; \\ |a| + |b|, & a \neq b. \end{cases}$$

Demostrar que $\rho$ es una distancia.

## Propiedades elementales de distancias

En los siguientes ejercicios se supone que $(X,d)$ es un espacio métrico.

**23 Ejercicio** (la desigualdad poligonal)**.** Demostrar que para cualquier $n$ en $\mathbb{N}$ y cualesquiera $x_1,\ldots,x_{n+1}$ en $X$

$$d(x_1,x_{n+1}) \leq \sum_{k=1}^{n} d(x_k,x_{k+1}).$$

**24 Ejercicio** (la desigualdad inversa del triángulo)**.** Sean $a,b,c \in X$. Demostrar que

$$|d(a,b) - d(a,c)| \leq d(b,c).$$

**25 Ejercicio** (la desigualdad de cuadrilátero)**.** Sean $x_1,x_2,x_3,x_4 \in X$. Demostrar que

$$|d(x_1,x_2) - d(x_3,x_4)| \leq d(x_1,x_3) + d(x_2,x_4).$$

**26 Definición** (la distancia de un punto a un conjunto)**.** Dados $x \in X$, $Y \subseteq X$, pongamos

$$d(x,Y) := \inf_{y\in Y} d(x,y).$$

**27 Ejercicio** (la desigualdad inversa del triángulo para la distancia de un punto a un conjunto)**.** Sean $a,b \in X$, $Y \subseteq X$. Demostrar que

$$|d(a,Y) - d(b,Y)| \leq d(a,b).$$

**28 Ejercicio** (¿cuándo la distancia de un punto a un conjunto es cero?)**.** Sean $a \in X$, $Y \subseteq X$. Demostrar que

$$d(a,Y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \in \operatorname{cl}(Y).$$

## Bolas abiertas en espacios métricos

En los siguientes ejercicios se supone que $(X, d)$ es un espacio métrico.

**29 Definición** (bola abierta en un espacio métrico)**.** Dados $a$ en $X$, $r > 0$,

$$B(a, r) \coloneqq \{x \in X\colon\ d(x, a) < r\}.$$

**30 Ejercicio** (el centro de una bola pertenece a esta bola)**.** Sean $a \in X$, $r > 0$. Mostrar que $a \in B(a, r)$.

**31 Ejercicio** (comparación de dos bolas concéntricas)**.** Sean $x \in X$, $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 < r_2$. Demostrar que

$$B(x, r_1) \subseteq B(x, r_2).$$

**32 Ejercicio** (la intersección de dos bolas concéntricas)**.** Sean $x \in X$, $r_1, r_2 > 0$. Demostrar que

$$B(x, r_1) \cap B(x, r_2) = B(x, \min\{r_1, r_2\}).$$

**33 Ejercicio** (una condición suficiente para que dos bolas sean disjuntas)**.** Sean $x_1, x_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$r_1 + r_2 \le d(x_1, x_2).$$

Demostrar que $B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) = \varnothing$.

**34 Ejercicio** (una condición suficiente para que una bola esté contenida en otra)**.** Sean $x_1, x_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$d(x_1, x_2) + r_1 \le r_2.$$

Demostrar que $B(x_1, r_1) \subseteq B(x_2, r_2)$.

**35 Ejercicio** (un ejemplo cuando una bola de radio más grande es un subconjunto propio de una bola de radio más pequeño)**.** Construir un espacio métrico $(X, d)$, puntos $x_1, x_2 \in X$ y radios $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 < r_2$, pero $B(x_2, r_2) \subsetneq B(x_1, r_1)$. Sugerencia: se puede usar el espacio métrico del Ejercicio 22.

**36 Ejercicio** (un ejemplo de dos bolas ajenas de radios grandes)**.** Construya un espacio métrico $(X, d)$, puntos $x_1, x_2 \in X$ y radios $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 + r_2 > d(x_1, x_2)$, pero $B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) = \varnothing$. Sugerencia: se puede usar el conjunto $\mathbb{Z}$ con la métrica $d(x, y) = |x - y|$.

## La topología asociada a una métrica

**37 Ejercicio** (el interior de un conjunto respecto a una métrica)**.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Para cada $A$ en $2^X$, pongamos

$$\mathrm{int}_d(A) \coloneqq \{x \in X\colon\ \exists r > 0\ B(x, r) \subseteq A\}.$$

Demostrar que $\mathrm{int}_d(A) \subseteq A$.

**38 Ejercicio** (la topología asociada a una métrica)**.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Pongamos

$$\tau_d \coloneqq \{A \in 2^X\colon\ \ \mathrm{int}_d(A) = A\}.$$

Demostrar que $\tau_d$ es una topología en $X$.

**39 Ejercicio** (las bolas abiertas son abiertas)**.** Sean $(X, d)$ un espacio métrico, $x \in X$, $r > 0$. Demostrar que $B(x, r) \in \tau_d$.

**40 Ejercicio** (la topología asociada a una métrica es de Hausdorff)**.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Demostrar que la topología $\tau_d$ es de Hausdorff, esto es, para cualesquiera $a, b$ en $X$ tales que $a \neq b$, existen $A, B$ en $\tau_d$ tales que $a \in A$, $b \in B$ y $A \cap B = \varnothing$.

**41 Ejercicio** (el interior de un conjunto en un espacio métrico coincide con su interior en la topología asociada a la métrica)**.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. Denotemos por $\tau$ a la topología asociada a $d$. Demostrar que $\mathrm{int}_d(A) = \mathrm{int}_\tau(A)$.

## Sucesiones convergentes en espacios métricos

**42 Ejercicio.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico, sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X$, esto es, $a \in X^{\mathbb{N}}$, y sea $b \in X$. ¿Cuándo se dice que $b$ es el límite de la sucesión $a$? Escribir la definición formal con 3 cuantificadores. Notación: $a \to b$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$.

**43 Ejercicio.** Sea $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una sucesión estrictamente creciente. Demostrar que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \nu(k) \geq k.$$

**44 Ejercicio** (subsucesión de una sucesión convergente)**.** Sean $X$ un espacio métrico, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X$, $b \in X$, $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función escrictamente creciente. Demostrar que $\lim_{k\to\infty} a_{\nu(k)} = b$.

**45 Ejercicio** (descripción de la cerradura de un conjunto en un espacio métrico, en términos de sucesiones convergentes)**.** Sean $X$ un espacio métrico, $A \subseteq X$, $b \in X$. Demostrar que $b \in \operatorname{cl}(A)$ si, y solo si, existe $x \in A^{\mathbb{N}}$ tal que $a \to b$.

**46 Ejercicio** (criterio de continuidad en términos de sucesiones, conocido como criterio de Heine)**.** Sean $X, Y$ espacios métricos, $f\colon X \to Y$, $a \in X$. Demuestre que $f$ es continua en $a$ si, y solo si, para cualquier sucesion $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $X$ que converge al punto $a$, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $f(a)$.

## Receta para convertir un espacio pseudométrico en un espacio métrico

**47 Ejercicio** (construcción de un espacio métrico a partir de un espacio pseudométrico)**.** Sea $(X, d)$ un espacio pseudométrico.

1. Definimos una relación binaria en $X$ mediante la siguiente regla:

   $$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad d(x, y) = 0.$$

   Demostrar que esta relación binaria es una relación de equivalencia. Para cada $x$ en $X$ denotemos su clase de equivalencia por $[x]$. Denotemos por $Y$ al conjunto de las clases de equivalencia.

2. Demostrar que si $x_1 \sim x_2$, $y_1 \sim y_2$, entonces $d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2)$.

3. Definimos $\rho\colon Y \times Y \to [0, +\infty)$ mediante la regla

   $$\rho([x], [y]) \coloneqq d(x, y).$$

   Explicar por qué esta definición es consistente. Demostrar que $\rho$ es una métrica.

## El diámetro de un conjunto en un espacio métrico

**48 Ejercicio** (el diámetro de un subconjunto de un espacio métrico)**.** Sean $X$ un espacio métrico, $Y \subseteq X$. Escribir la definición de $\operatorname{diam}(Y)$.

**49 Ejercicio** (monotonía del diámetro)**.** Sea $X$ un espacio métrico y sean $Y, Z \subseteq X$ tales que $Z \subseteq Y$. Demostrar que $\operatorname{diam}(Z) \le \operatorname{diam}(Y)$.

**50 Ejercicio** (el diámetro de la unión de dos conjuntos)**.** Sea $X$ un espacio métrico y sean $Y, Z \subseteq X$. Supongamos que $Y \neq \varnothing$ y $Z \neq \varnothing$. Demostrar que

$$\operatorname{diam}(Y \cup Z) \le \operatorname{diam}(Y) + \operatorname{diam}(Z) + d(Y, Z),$$

donde $d(Y, Z) \coloneqq \operatorname{ínf}\big\{d(y, z)\colon\ y \in Y,\ z \in Z\big\}$.

## Subconjuntos acotados en espacios métricos

**51 Definición.** Sean $X$ un espacio métrico, $Y \subseteq X$. Decimos que $Y$ es *acotado*, si $\operatorname{diam}(Y) < +\infty$.

**52 Ejercicio** (criterio del subconjunto acotado)**.** Sean $X$ un espacio métrico, $Y \subseteq X$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $Y$ es acotado, esto es, $\operatorname{diam}(Y) < +\infty$;

(b) existen $a$ en $Y$ y $r > 0$ tales que $Y \subseteq B(a, r)$;

(c) existen $a$ en $X$ y $r > 0$ tales que $Y \subseteq B(a, r)$.

**53 Ejercicio** (uniones finitas de subconjuntos acotados son acotadas)**.** Sea $X$ un espacio métrico y sean $Y_1, \ldots, Y_m$ subconjuntos acotados de $X$. Demostrar que $Y_1 \cup \cdots \cup Y_m$ es acotado.

**54 Ejercicio** (subconjuntos de subconjuntos acotados son acotados)**.** Sea $X$ un espacio métrico y sean $Y, Z \subseteq X$ tales que $Y$ es acotado y $Z \subseteq Y$. Demostrar que $Z$ es acotado.

## Sucesiones de Cauchy y espacios métricos completos

**55 Ejercicio.** Sea $(X,d)$ un espacio métrico y sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. ¿Cuándo se dice que $a$ es *de Cauchy*? Escribir la definición formal con 4 cuantificadores.

**56 Ejercicio.** Demostrar que cada sucesión convergente es de Cauchy.

**57 Ejercicio** (el medidor de Cauchy de una sucesión)**.** Sea $(X,d)$ un espacio métrico y sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Definimos $\gamma_a \colon \mathbb{N} \to [0,+\infty]$,

$$\gamma_a(k) \coloneqq \operatorname{diam}\left(\left\{a_n \colon\ n \geq k\right\}\right).$$

Demostrar que $\omega_a$ es una sucesión decreciente (en el sentido no estricto), esto es, para cada $k$ en $\mathbb{N}$ se tiene que

$$\gamma_a(k+1) \leq \gamma_a(k).$$

**58 Ejercicio** (criterio de sucesión de Cauchy en términos de los diámetros de las colas)**.** Sea $(X,d)$ un espacio métrico y sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Demostrar que $a$ es de Cauchy si, y sólo si,

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_a(k) = 0.$$

**59 Ejercicio.** Sean $X$ un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $X$, $a \in X$, $\nu \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función escrictamente creciente, $\lim_{k\to\infty} x_{\nu(k)} = a$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

**60 Ejercicio.** Escribir la definición del espacio métrico completo.

**61 Definición** (sucesión regular de Cauchy)**.** Sea $(X,d)$ un espacio métrico y sea $a \in X^{\mathbb{N}}$. Decimos que $a$ es *regular de Cauchy*, si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d(a_n, a_{n+1}) < 2^{-n-1}.$$

**62 Ejercicio** (cada sucesión regulares de Cauchy es de Cauchy)**.** Sea $(X,d)$ un espacio métrico y sea $a$ una sucesión regular de Cauchy en $X$. Demostrar que para cada $k$ en $\mathbb{N}$ y cada $p,q$ en $\mathbb{N}$ con $p,q \geq k$, se cumple la desigualdad

$$d(a_p, a_q) < 2^{-k}.$$

**63 Ejercicio.** Demostrar que en cualquier sucesión de Cauchy hay una subsucesión regular de Cauchy.

**64 Ejercicio.** Demostrar que el espacio métrico es completo si, y solo si, cualquier sucesión regular de Cauchy converge.

**65 Ejercicio.** Sea $X$ un espacio métrico completo y sea $Y$ un subespacio métrico de $X$, es decir, un subconjunto de $X$ considerado con la distancia inducida. Demostrar que $Y$ es completo si, y sólo si, $Y$ es cerrado en $X$.

## Funciones uniformemente continuas

**66 Ejercicio.** Sean $X, Y$ espacios métricos, $f\colon X \to Y$. ¿Cuándo se dice que $f$ es uniformemente continua? Explicar por qué cada función uniformemente continua es continua. Denotamos por $C_u(X,Y)$ al conjunto de las funciones uniformemente continuas $X \to Y$.

**67 Ejercicio** (el medidor de continuidad uniforme de una función)**.** Sean $X$, $Y$ espacios métricos, $f\colon X \to Y$. Definimos $\omega_f\colon (0,+\infty) \to [0,+\infty]$ mediante la regla

$$\omega_f(\delta) := \sup\{d_Y(f(a), f(b))\colon\ a, b \in X,\ d_X(a,b) \le \delta\}.$$

En la terminología clásica, $\omega_f$ se llama el módulo de continuidad uniforme de $f$.

**68 Ejercicio** (el medidor de continuidad uniforme de una función es una función creciente)**.** Sean $X$, $Y$ espacios métricos, $f\colon X \to Y$. Demostrar que $\omega_f$ es una funcion creciente: si $\delta_1 < \delta_2$, entonces $\omega_f(\delta_1) \le \omega_f(\delta_2)$.

**69 Ejercicio.** Demostrar que $f$ es uniformemente continua si, y solo si, $\lim_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = 0$.

**70 Ejercicio** (funciones Lipschitz continuas)**.** Sean $X$, $Y$ espacios métricos, $f\colon X \to Y$, $L \ge 0$. ¿Cuándo se dice que $f$ es *Lipschitz continua con coeficiente de Lipschitz* $L$? Después enunciar la definición, enunciar y demostrar un criterio en términos de $\omega_f$.

**71 Ejercicio** (funciones uniformemente continuas y sucesiones de Cauchy)**.** Sean $X$, $Y$ espacios métricos, $f \in C_u(X,Y)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $X$. Demostrar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $Y$.

**72 Ejercicio** (extensión continua de una función uniformemente continua definida en un subconjunto denso)**.** Sean $X$, $Y$ espacios métricos, $Y$ completo, $D \subseteq X$, $\mathrm{cl}(D) = X$, $f \in C_u(D, Y)$. Demostrar que existe una función $g$ en $C_u(X, Y)$ tal que $g|_D = f$. Demostrar que si $u, v \in C(X, Y)$ tales que $u|_D = f$ y $v|_D = f$, entonces $u = v$.

## Completación de un espacio métrico

**73 Ejercicio.** Sean $X$, $Y$ espacios métricos. ¿Cuándo se dice que $Y$ es una completación de $X$?

**74 Ejercicio** (completación del espacio métrico y extensiones de funciones uniformemente continuas)**.** Sean $X$, $Y$, $Z$ espacios métricos, $Y$ completo, $j\colon X \to Y$ una isometría, $\mathrm{cl}(j(X)) = Y$, $f \in C_u(X, Z)$. Demostrar que existe una única función $g$ de clase $C_u(Y, Z)$ tal que $f = g \circ j$.

**75 Ejercicio** (unicidad de la completación del espacio métrico, salvo biyecciones isométricas)**.** Sean $X$, $Y$, $Z$ espacios métricos tales que $Y$ es una completación de $X$ y $Z$ es una completación de $X$. Construir una isometría biyectiva $Y \to Z$.

**76 Ejercicio** (existencia de una completación del espacio métrico)**.** Sea $X$ un espacio métrico. Explicar cómo construir su completación.

## Teorema del punto fijo de Banach

**77 Ejercicio.** Sea $X$ un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$. ¿Cuándo se dice que $f$ es *contractiva*?

**78 Ejercicio.** Sea $X$ un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$. ¿Cómo se llama la siguiente propiedad de $f$? (Se recomienda comparar la terminología que usan diferentes autores.)

$$\forall a, b \in X \qquad \Big(a \neq b \quad \Longrightarrow \quad d(f(a), f(b)) < d(a, b)\Big). \tag{1}$$

**79 Ejercicio.** Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la siguiente regla:

$$f(x) \coloneqq \frac{x}{1 + |x|}.$$

Demostrar las siguientes propiedades de $f$.

1. Demostrar que $f(x) < x$ y $f(-x) > -x$ para cada $x > 0$.

2. Demostrar que se cumple (1). Sugerencia: si $0 \le a < b$ o $a < b \le 0$, usar el teorema del valor medio. Si $a < 0 < b$, se puede razonar así:
$$f(b) - f(a) = f(b) - f(0) + f(0) - f(a) < (b - 0) + (0 - a) = b - a.$$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$

4. $f$ no es contractiva.

**80 Ejercicio** (la desigualdad fundamental para funciones contractivas)**.** Sea $X$ un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con coeficiente $L$. Demuestre que para cualesquiera $a$, $b$ en $X$
$$d(a,b) \le \frac{1}{1-L}\Big(d(a, f(a)) + d(b, f(b))\Big).$$

**81 Ejercicio** (iteraciones de una función)**.** Sea $f\colon X \to X$. Explicar cómo definir $f^{[p]}$ para cada $p$ en $\mathbb{N}_0$. Demostrar que $f^{[p]} \circ f^{[q]} = f^{[p+q]}$ para cualesquiera $p$, $q$ en $\mathbb{N}_0$.

**82 Ejercicio** (iteraciones de una función Lipschitz continua)**.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función Lipschitz continua con coeficiente $L$. Demostrar que para cada $n$ en $\mathbb{N}$ la función $f^{[n]}$ es Lipschitz continua con coeficiente $L^n$.

**83 Ejercicio** (teorema del punto fijo de Banach)**.** Sean $X$ un espacio métrico completo, $f\colon X \to X$ una contracción con coeficiente $L$. Demuestre que existe un único punto $a$ en $X$ tal que $f(a) = a$. Demostrar que si $b \in X$, entonces para cada $n$ en $\mathbb{N}$
$$d(f^{[n]}(b), a) \le \frac{L^n\, d(b, f(b))}{1-L},$$
así que la sucesión $(f^{[n]}(b))_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $a$.

**84 Ejercicio** (teorema del punto fijo para funciones cuyas iteraciones son contractivas)**.** Sean $X$ un espacio métrico completo, $f\colon X \to X$, $m \in \mathbb{N}$ tales que $f^{[m]}$ es una contracción. Demostrar que $f$ tiene un único punto fijo.

**85 Ejercicio** (teorema de Picard en una franja)**.** Sean $A$ un intervalo finito abierto en $\mathbb{R}$, $F \in C_b(A \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $t_0 \in A$, $v_0 \in \mathbb{R}$. Demostrar que existe una única función $x$ en $C^1(A, \mathbb{R})$ que resuelve el problema de Cauchy
$$x'(t) = F(t, x(t)) \quad (t \in A), \qquad x(t_0) = v_0.$$

## Teorema de Baire

**86 Ejercicio.** Escribir la definición del espacio de Baire.

**87 Ejercicio.** Sea $X$ un espacio métrico completo. Demostrar que $X$ es de Baire.

**88 Ejercicio.** Escribir el criterio de espacio de Baire en términos de subconjuntos magros (conjuntos de la primera categoría).

**89 Ejercicio.** Sea $X$ un espacio métrico completo no vacío. Demostrar que $X$ no es magro.

## Espacios métricos totalmente acotados

**90 Ejercicio** (sobre la $\varepsilon$-vecindad de un subconjunto de un espacio métrico)**.** Sean $(X,d)$ un espacio métrico, $A \subseteq X$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$V(A,\varepsilon) \coloneqq \big\{x \in X\colon\ d(x,A) < \varepsilon\big\}.$$

- Demostrar que
$$V(A,\varepsilon) = \big\{x \in X\colon \quad \exists a \in A \quad d(x,a) < \varepsilon\big\}.$$

- Demostrar que
$$V(A,\varepsilon) = \bigcup_{a\in A} B(a,\varepsilon).$$

**91 Ejercicio** (criterio de $\varepsilon$-red en un espacio métrico)**.** Sean $X$ un espacio métrico, $A \subseteq X$, $\varepsilon > 0$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $A$ es una $\varepsilon$-red para $X$, esto es, $V(A,\varepsilon) = X$;

(b) para cada $x$ en $X$, $d(x,A) < \varepsilon$;

(c) para cada $x$ en $X$ existe $a$ en $A$ tal que $d(x,a) < \varepsilon$;

(d) $X = \bigcup_{a\in A} B(a,\varepsilon)$.

**92 Ejercicio** (criterio de $\varepsilon$-red para un subconjunto de un espacio métrico)**.** Sean $X$ un espacio métrico, $Y \subseteq X$, $A \subseteq X$, $\varepsilon > 0$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $A$ es una $\varepsilon$-red para $Y$, esto es, $Y \subseteq V(A, \varepsilon)$;

(b) para cada $x$ en $Y$, $d(x, A) < \varepsilon$;

(c) para cada $x$ en $Y$ existe $a$ en $A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$;

(d) $Y \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.

**93 Ejercicio.** Escribir la definición del espacio métrico *totalmente acotado*.

**94 Ejercicio.** Demostrar que cada espacio métrico totalmente acotado es acotado.

**95 Ejercicio.** Sea $X$ un espacio métrico. Demostrar que $X$ es totalmente acotado si, y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe una cubierta finita $(A_1, \ldots, A_m)$ de $X$ tal que $\operatorname{diam}(A_k) < \varepsilon$ para cada $k$ en $\{1, \ldots, m\}$.

**96 Ejercicio** (criterio de espacio métrico no totalmente acotado)**.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $X$ no es totalmente acotado;

(b) existen una sucesión $s \in X^{\mathbb{N}}$ y un número $\eta > 0$ tales que

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \qquad \Big( j \neq k \quad \Longrightarrow \quad d(s_j, s_k) \geq \eta \Big).$$

(c) existen un subconjunto infinito $M$ de $X$ y un número $\eta > 0$ tales que

$$\forall a, b \in M \qquad \Big( a \neq b \quad \Longrightarrow \quad d(a, b) \geq \eta \Big).$$

**97 Ejercicio** (criterio de espacio métrico totalmente acotado en términos de sucesiones de Cauchy)**.** Sea $X$ un espacio métrico. Demostrar que $X$ es totalmente acotado si, y solo si, cualquier sucesion en $X$ tiene una subsucesión de Cauchy.

## Espacios topológicos compactos

**98 Ejercicio.** Sea $X$ un espacio topológico. ¿Cuándo se dice que $X$ es *compacto*?

**99 Ejercicio** (criterio de compacidad en términos de colecciones cerradas)**.** ¿Cuándo una colección de conjuntos se llama *centrada*? Enunciar y demostrar el criterio de compacidad del espacio topológico en términos de colecciones de conjuntos cerrados.

**100 Ejercicio.** Sea $X$ un espacio topológico compacto y sea $Y$ un subconjunto cerrado de $Y$. Demostrar que $Y$ es compacto.

**101 Ejercicio.** Sea $X$ un espacio topológico de Hausdorff y sea $Y$ subespacio compacto de $X$. Demostrar que $Y$ es cerrado en $X$.

**102 Ejercicio.** Sea $X$ un espacio topológico de Hausdorff y sean $Y_1, \ldots, Y_m$ sus subespacios compactos. Demostrar que $Y_1 \cup \cdots \cup Y_m$ es compacto.

**103 Ejercicio.** Sean $X$ un espacio topológico de Hausdorff, $Y$ un subespacio compacto de $X$, $Z$ un subespacio cerrado de $Y$. Demostrar que $Z$ es compacto.

**104 Ejercicio.** Sean $X$ un espacio topológico compacto, $Y$ un espacio topológico, $f \in C(X, Y)$. Demostrar que $f[X]$ es compacto.

## Espacios métricos compactos

**105 Ejercicio.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico. ¿Cuándo se dice que $(X, d)$ es *secuencialmente compacto*? Escribir la definición.

**106 Ejercicio** (criterio de compacidad del espacio métrico)**.** Sea $X$ un espacio métrico. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $X$ es compacto;

(b) $X$ es secuencialmente compacto;

(c) $X$ es completo y totalmente acotado.

**107 Ejercicio.** Sea $A$ un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}$. Demostrar que

$$\sup(A), \operatorname{ínf}(A) \in A.$$

**108 Ejercicio.** Sean $X$ un espacio métrico compacto, $Y$ un espacio métrico. Demostrar que $C_u(X, Y) = C(X, Y)$.