

Medidas y funciones medibles

Problemas para examen

Estos problemas están redactados por Egor Maximenko, con ayuda de Breitner Arley Ocampo Gómez.

Sigma-álgebras

1. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{F} \subseteq 2^X$. ¿Cuándo se dice que \mathcal{F} es una σ -álgebra sobre X ? Recordar la definición.

2. **Propiedades elementales de σ -álgebras.** Demostrar que cada σ -álgebra es cerrada bajo las intersecciones numerables, bajo las uniones finitas, bajo las intersecciones finitas, bajo la diferencia de dos conjuntos y bajo la diferencia simétrica de dos conjuntos.

3. **Las álgebras finitas de conjuntos son σ -álgebras.** Sea $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ tal que $\emptyset \in \mathcal{F}$, $X \setminus A \in \mathcal{F}$ para cada A en \mathcal{F} , y $A \cup B \in \mathcal{F}$ para cualesquiera A, B en \mathcal{F} . Demostrar que \mathcal{F} es una σ -álgebra.

4. **Propiedades de conjuntos finitos o numerables (repasso).** Recordar cómo se demuestran las siguientes proposiciones.

- Sea $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos a lo más numerables. Entonces la unión $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ también es un conjunto a lo más numerable.
- Sea B un conjunto a lo más numerable y sea $C \subseteq B$. Entonces que C también es a lo más numerable.

5. **Subconjuntos finitos o numerables de un conjunto no numerable y sus complementos.** Sea X un conjunto no numerable. Denotemos por \mathcal{N} al conjunto de los $A \subseteq X$ tales que A es finito o numerable. Pongamos

$$\mathcal{F} := \{A \subseteq X : A \in \mathcal{N} \vee X \setminus A \in \mathcal{N}\}.$$

Demuestre que \mathcal{F} es una σ -álgebra.

6. **Sigma-álgebra restringida.** Sea (X, \mathcal{F}) un espacio medible y sea $Y \in \mathcal{F}$. Pongamos

$$\mathcal{F}_Y := \{A \in \mathcal{F} : A \subseteq Y\}.$$

Mostrar que

$$\mathcal{F}_Y = \mathcal{F} \cap 2^Y.$$

Demostrar que \mathcal{F} es una σ -álgebra.

La sigma-álgebra generada por una colección de conjuntos

7. La intersección de un conjunto de σ -álgebras. Sea X un conjunto y sea Ψ un conjunto no vacío de σ -álgebras sobre X . Demostrar que $\cap\Psi$ es una σ -álgebra.

8. Definición de la σ -álgebra generada por una colección de conjuntos. Escribir la definición de la σ -álgebra generada por una colección de conjuntos.

9. Ejemplo: la σ -álgebra generada por una colección dada de conjuntos. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea $\mathcal{G} = \{\{1, 2\}\}$. Encontrar la σ -álgebra generada por \mathcal{G} . Enunciar la respuesta y presente una demostración completa.

10. Ejemplo: la σ -álgebra generada por una colección dada de conjuntos. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea $\mathcal{G} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}\}$. Encontrar la σ -álgebra generada por \mathcal{G} . Enunciar la respuesta y presente una demostración completa.

11. La σ -álgebra generada por los subconjuntos unipuntuales de un conjunto no numerable. Sea X un conjunto no numerable y sea

$$\mathcal{G} := \{\{a\} : a \in X\}.$$

Describir la σ -álgebra generada por \mathcal{F} .

Medidas

En estos problemas se supone que (X, \mathcal{F}, μ) es un espacio de medida.

12. Propiedad aditiva. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}$ disjuntos a pares. Demostrar que

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right) = \sum_{j=1}^m \mu(A_j).$$

13. La suma de las medidas de la unión e intersección de dos conjuntos. Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Demostrar que

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

14. Expresión para la medida de la unión. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $\mu(A \cap B) < +\infty$. Demostrar que

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

15. Ejemplo: un defecto de la fórmula para la medida de la unión. Encontrar un espacio de medida (X, \mathcal{F}, μ) y un par de conjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $\mu(A \cap B) = +\infty$. Mostrar que la fórmula del Ejercicio 14 no funciona en este caso.

16. Medida de la diferencia. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Demostrar que

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B).$$

17. Monotonía de la medida. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Demostrar que

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

18. La medida de la unión de una sucesión creciente (continuidad de medida por abajo). Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos \mathcal{F} -medibles, esto es,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \subseteq A_{n+1}.$$

Denotemos por B a la unión de esta sucesión de conjuntos: $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(B).$$

19. La medida de la intersección de una sucesión decreciente (continuidad de medida por arriba). Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de conjuntos \mathcal{F} -medibles, esto es,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_{n+1} \subseteq A_n.$$

Supóngamos que el conjunto A_1 es de medida finita, es decir, $\mu(A_1) < +\infty$. Denotemos por B a la intersección de esta sucesión de conjuntos: $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(B).$$

20. La medida de la intersección de una sucesión decreciente, contraejemplo. Construir un espacio de medida (X, \mathcal{F}, μ) y una sucesión decreciente $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos \mathcal{F} -medibles tales que

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) < \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

21. La propiedad subaditiva de la medida, el caso de dos conjuntos. Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Demostrar que

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

Indicación: determinar, si es mejor aplicar el resultado del Ejercicio 13 o el resultado del Ejercicio 14. Recordar que el Ejercicio 14 tiene una condición adicional.

22. La propiedad subaditiva de la medida, el caso de una unión finita. Demostrar por inducción sobre n que

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

23. La propiedad subaditiva de la medida, el caso de una unión numerable. Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en \mathcal{F} . Demostrar que

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

24. Criterio de que una medida es σ -finita. Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) Existe una sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos \mathcal{F} -medibles tales que $\mu(A_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.
- (b) Existe una sucesión creciente $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos \mathcal{F} -medibles tales que $\mu(B_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.
- (c) Existe una sucesión $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos por pares, \mathcal{F} -medibles y tales que $\mu(C_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

Si μ cumple con estas condiciones, entonces se llama σ -finita.

25. Un criterio de la propiedad σ -aditiva. Sean X un conjunto, \mathcal{F} una σ -álgebra sobre X , $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty)$. Notemos que $\mu(X) < +\infty$. Supongamos que μ tiene las siguientes propiedades:

- (P1) $\mu(\emptyset) = 0$.
- (P2) La función μ es finitamente aditiva: si $m \in \mathbb{N}$ y A_1, \dots, A_m son conjuntos disjuntos pertenecientes a \mathcal{F} , entonces

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^m A_k \right) = \sum_{k=1}^m \mu(A_k).$$

- (P3) La función es “continua por abajo” en el siguiente sentido: si $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de elementos de \mathcal{F} , entonces

$$\mu \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k).$$

Demostrar que μ es σ -aditiva.

26. Subespacio de un espacio de medida. Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $Y \in \mathcal{F}$. Definimos \mathcal{F}_Y como en el Problema 6 y definimos μ_Y como $\mu|_{\mathcal{F}_Y}$, es decir,

$$\mu_Y(A) := \mu(A) \quad (A \in \mathcal{F}_Y).$$

Mostrar que μ_Y es una medida.

Ejemplos de medidas

27. La medida asociada a un vector real. Sean $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$. Definimos $\nu: 2^{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty)$ mediante la siguiente regla. Para cada $Y \subseteq \mathbb{R}$,

$$\nu(Y) := \frac{1}{n} \#\{j \in \{1, \dots, n\}: a_j \in Y\}.$$

Demuestre que ν es una medida de probabilidad.

28. La medida asociada a un vector de valores con pesos. Sean $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $p \in (0, +\infty)^n$. Definimos $\nu: 2^{\mathbb{R}} \rightarrow [0, +\infty)$ mediante la siguiente regla. Para cada $Y \subseteq \mathbb{R}$,

$$\nu(Y) := \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\}: \\ a_j \in Y}} p_j.$$

Demuestre que ν es una medida. ¿Cuándo ν es una medida de probabilidad?

29. Una medida definida en el conjunto de los números naturales. Definimos $\nu: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, +\infty)$ mediante la siguiente regla. Para cada $Y \subseteq \mathbb{N}$,

$$\nu(Y) := \sum_{j \in Y} \frac{1}{2^j}.$$

Muestre que

$$\nu(Y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \chi_A(j).$$

Demuestre que ν es una medida de probabilidad.

Sobre la σ -álgebra de Borel de la recta real

30. La sigma-álgebra de Borel de la recta real está generada por los rayos derechos abiertos. Demostrar que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está generada por \mathcal{G} , donde

$$\mathcal{G} := \{(a, +\infty): a \in \mathbb{R}\}.$$

31. La sigma-álgebra de Borel de la recta real está generada por los rayos derechos abiertos con extremos racionales. Demostrar que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está generada por la colección

$$\{(a, +\infty): a \in \mathbb{Q}\}.$$

32. La sigma-álgebra de Borel de la recta real está generada por los intervalos cerrados acotados. Demostrar que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está generada por la colección

$$\{[a, b]: a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Funciones medibles

33. Criterio general de la medibilidad de una función en términos de las pre-ímagenes de los conjuntos generadores de la sigma-álgebra en el contradominio. Sean X, Y conjuntos, sean \mathcal{F} y \mathcal{H} algunas σ -álgebras sobre X y Y respectivamente, y sea $\mathcal{G} \subseteq 2^Y$ un conjunto de subconjuntos de Y tal que \mathcal{H} está generada por \mathcal{G} . Además sea $f: X \rightarrow Y$ una función. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(A) f es \mathcal{F} - \mathcal{H} medible, esto es, $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{H}$.

(B) $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{G}$.

34. Criterio de la medibilidad de una función real. Sea X un conjunto, sea \mathcal{F} una σ -álgebra sobre X y sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es \mathcal{F} -medible, esto es, $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ para todo conjunto B medible en \mathbb{R} .

(b) $f^{-1}[(a, +\infty)] \in \mathcal{F}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(c) $f^{-1}[(r, +\infty)] \in \mathcal{F}$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

35. Criterio de la medibilidad de una función con valores en el eje real extendido. Sea X un conjunto, sea \mathcal{F} una σ -álgebra sobre X y sea $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es \mathcal{F} -medible, esto es, $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ para todo conjunto B medible en $\overline{\mathbb{R}}$.

(b) $f^{-1}[(a, +\infty]] \in \mathcal{F}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(c) $f^{-1}[(r, +\infty]] \in \mathcal{F}$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

36. Criterio de medibilidad de una función compleja. Sea X un conjunto, sea \mathcal{F} una σ -álgebra sobre X y sea $f: X \rightarrow \mathbb{C}$. Denotemos por g y h la partes real y la parte imaginaria de f :

$$g = \operatorname{Re}(f), \quad h = \operatorname{Im}(f).$$

Demuestre que $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ si y sólo si $g, h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$.

37. Criterio de la medibilidad de la función característica de un conjunto. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ una σ -álgebra sobre X y sea $A \subseteq X$. Denotemos por χ_A a la *función característica* (llamada también *función indicadora*) del conjunto A :

$$\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A, \end{cases}$$

Demuestre que la función χ_A es \mathcal{F} -medible si y sólo si $A \in \mathcal{F}$.

38. Medibilidad de una función continua. Sean X, Y espacios topológicos y sean \mathcal{B}_X y \mathcal{B}_Y sus álgebras de Borel. Sea $f \in C(X, Y)$. Demuestre que $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B}_X, Y, \mathcal{B}_Y)$, esto es, f es \mathcal{B}_X - \mathcal{B}_Y medible.

Operaciones con funciones medibles

39. El supremo de una sucesión de funciones medibles. Sea X un conjunto, sea \mathcal{F} una σ -álgebra sobre X y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones \mathcal{F} -medibles, $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que es \mathcal{F} -medible la función $g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, donde

$$\forall x \in X \quad g(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x).$$

40. El ínfimo de una sucesión de funciones medibles. Sea X un conjunto, sea \mathcal{F} una σ -álgebra sobre X y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones \mathcal{F} -medibles, $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que es \mathcal{F} -medible la función $g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, donde

$$\forall x \in X \quad g(x) := \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x).$$

41. Medibilidad de la composición de funciones medibles. Sean X, Y, Z conjuntos y sean $\mathcal{F} \subseteq 2^X$, $\mathcal{G} \subseteq 2^Y$, $\mathcal{H} \subseteq 2^Z$ algunas σ -álgebras. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{G})$ y sea $g \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, Z, \mathcal{H})$. Demuestre que $g \circ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Z, \mathcal{H})$.

42. Medibilidad de la composición de una función continua con una función medible. Sea (X, \mathcal{F}) un espacio medible y sean Y, Z espacio topológicos. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$ y sea $g \in C(Y, Z)$. Demuestre que $g \circ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Z)$.

43. Cada subconjunto abierto del plano se puede representar como una unión numerable de ladrillos abiertos. Sea A un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 . Demuestre que existen $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n) \times (c_n, d_n).$$

44. Teorema sobre la medibilidad de una función continua de dos argumentos reales, compuesta con dos funciones medibles. Sea (X, \mathcal{F}) un espacio medible, sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ y sea $\Phi \in C(\mathbb{R}^2, Y)$, donde Y es un espacio topológico. Definamos $h: X \rightarrow Y$ mediante la siguiente fórmula:

$$\forall x \in X \quad h(x) = \Phi(f, g).$$

Demuestre que $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$. Sugerencia: puede utilizar el resultado de 43.

Hay por lo menos dos caminos para demostrar la medibilidad de la suma y producto de dos funciones reales medibles. Primero consideramos el método basado en el Teorema 44.

45. Suma y producto de dos funciones reales medibles. Sea X un conjunto, sea \mathcal{F} una σ -álgebra sobre X y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Demuestre que $f + g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ y $fg \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Sugerencia: aplicar el Teorema 44.

46. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Usando el resultado del problema anterior demuestre que los siguientes conjuntos son medibles:

$$\{x \in X: f(x) < g(x)\}, \quad \{x \in X: f(x) > g(x)\}, \quad \{x \in X: f(x) = g(x)\}.$$

Ahora estudiamos otro método que utiliza el criterio de la medibilidad de funciones reales y la densidad de números racionales.

47. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Demuestre que

$$\{x \in X: f(x) < g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in X: f(x) < r\} \cap \{x \in X: g(x) > r\}$$

y deduzca de aquí que el conjunto $\{x \in X: f(x) < g(x)\}$ es medible.

48. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Demuestre que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X: f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in X: f(x) > r\} \cap \{x \in X: g(x) > \alpha - r\}.$$

Deduzca de aquí que $f + g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$.

49. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Demuestre que $f^2 \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$.

50. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\lambda f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$.

51. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$. Verifique las *identidades de polarización*

$$fg = \frac{1}{4} ((f+g)^2 - (f-g)^2), \quad fg = \frac{1}{2} ((f+g)^2 - f^2 - g^2).$$

Usando cualesquiera de estas dos identidades y los resultados de ejercicios anteriores muestre que $fg \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}})$.

52. Suma y producto de dos funciones complejas medibles. Sea X un conjunto, sea \mathcal{F} una σ -álgebra sobre X y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demuestre que $f+g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y $fg \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Funciones simples

53. Sobre una aproximación de la función identidad por una sucesión creciente de funciones escalonadas. Para todo n en $\{1, 2, 3, \dots\}$ definimos la función $\varphi_n: [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty)$ de la siguiente manera:

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}, & 0 \leq t < n; \\ n, & t \geq n. \end{cases}$$

Demuestre las siguientes propiedades de las funciones φ_n .

1. El conjunto de los valores de la función φ_n es $\{k \cdot 2^{-n} : 0 \leq k \leq n\}$.
2. Para cada k en $\{0, \dots, n \cdot 2^n - 1\}$,

$$\varphi_n^{-1}[\{k \cdot 2^{-n}\}] = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right).$$

Además,

$$\varphi_n^{-1}[\{n\}] = [n, +\infty).$$

3. La función φ_n es simple y medible.
4. Para todo t en $[0, +\infty]$ y todo n en $\{1, 2, 3, \dots\}$, $\varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t)$.
5. Para todo t en $[0, +\infty]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = t.$$

54. Proposición sobre la aproximación de funciones medibles positivas por funciones simples medibles positivas. Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida. Demuestre que para toda función \mathcal{F} -medible positiva $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ existe una sucesión de funciones g_n simples \mathcal{F} -medibles positivas tal que en todo punto x en X la sucesión $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es creciente y $g_n(x) \rightarrow f(x)$.

55. Sobre una aproximación de la función identidad por una sucesión no creciente de funciones escalonadas. Para cada n en \mathbb{N} , definimos $\psi_n: [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty)$ mediante la regla

$$\psi_n(t) := \begin{cases} \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}, & 0 \leq t < n; \\ n, & n \leq t \leq +\infty. \end{cases}$$

Demuestre que para cada t en $[0, +\infty]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t) = t.$$

Muestre que la sucesión $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es creciente, esto es, encuentre un punto t en $[0, +\infty]$ y un índice n en \mathbb{N} tales que

$$\psi_n(t) > \psi_{n+1}(t).$$