

# Extensión de medidas

## Problemas para examen

Usamos el convenio que  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ .

### Semianillos de conjuntos

**1 Observación** (el conjunto potencia). En estos temas trabajamos mucho con subconjuntos de un conjunto fijo  $X$ . Denotamos por  $2^X$  al conjunto de todos los subconjuntos de  $X$ , es decir, al conjunto potencia de  $X$ . Otra notación:  $\mathcal{P}(X)$ .

**2 Observación** (colección de conjuntos). Usamos la frase “colección de conjuntos” como un sinónimo de la frase “conjunto de conjuntos”.

**3 Definición.** Escriba la definición de *semianillo de conjuntos*.

**4 Nota** (convenio: el conjunto vacío pertenece al semianillo). En los siguientes problemas se supone que la condición  $\emptyset \in \mathcal{S}$  está incluida en la definición de semianillo de conjuntos. Algunos autores no la incluyen.

**5 Ejemplo** (el semianillo de los conjuntos unipuntuales de un conjunto). Sea  $X$  un conjunto. Denotemos por  $\mathcal{S}$  a la colección que consiste del conjunto vacío y de todos los subconjuntos unipuntuales de  $X$ :

$$\mathcal{S} := \{\emptyset\} \cup \left\{ \{x\} : x \in X \right\}.$$

Demuestre que

$$\forall A, B \in \mathcal{S} \quad \left( A = B \quad \vee \quad A \cap B = \emptyset \right).$$

Demuestre que  $\mathcal{S}$  es un semianillo de conjuntos.

**6 Definición** (definición de los rayos en el eje real, repaso). Sea  $a \in \mathbb{R}$ .

$$[a, +\infty) := \left\{ x \in \mathbb{R} : a \leq x < +\infty \right\}.$$

Cada elemento  $x$  de  $\mathbb{R}$  satisface  $x < +\infty$ . Por lo tanto,

$$[a, +\infty) := \left\{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \right\}.$$

Escriba las definiciones de

$$(a, +\infty), \quad (-\infty, a), \quad (-\infty, a].$$

**7 Definición** (definición de los intervalos del eje real). Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Definimos  $[a, b)$  de la siguiente manera:

$$[a, b) := \left\{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \quad \wedge \quad x < b \right\}.$$

En otras palabras,

$$[a, b) = [a, +\infty) \cap (-\infty, b).$$

Según esta definición,

$$[-3, -3) = \emptyset, \quad [7, 2) = \emptyset.$$

Escriba las definiciones de

$$[a, b], \quad (a, b), \quad (a, b].$$

**8 Observación.** En algunas situaciones, es cómodo considerar el “segmento que une  $a$  con  $b$ ”, donde no importa el orden entre  $a$  y  $b$ . Se recomienda definir este objeto como la envoltura convexa de estos dos puntos:

$$\text{conv}(a, b) := \left\{ (1 - \lambda)a + \lambda b : \lambda \in [0, 1] \right\}.$$

**9 Ejemplo** (fórmulas para la intersección y la diferencia de dos intervalos semiabiertos). Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

I. Encuentre fórmulas generales para

$$[a, +\infty) \cap [c, +\infty), \quad (-\infty, b) \cap (-\infty, d).$$

Sugerencia: utilice min y max.

II Encuentre una fórmula general para  $[a, b) \cap [c, d)$ .

III. Supongamos que  $c \leq d$ . Represente  $\mathbb{R} \setminus [c, d)$  como la unión de dos rayos.

IV. Supongamos que  $c \leq d$ . Encuentre una fórmula para  $[a, b) \setminus [c, d)$ .

**10 Ejemplo** (el semianillo de los intervalos semiabiertos del eje real). Sea

$$\mathcal{S} := \left\{ [a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \right\}.$$

Muestre que  $\mathcal{S}$  es un semianillo sobre  $\mathbb{R}$ . Sugerencia: use las fórmulas del problema anterior.

**11 Ejercicio** (el producto de dos semianillos es un semianillo). Sean  $X, Y$  algunos conjuntos,  $\mathcal{S}_1$  un semianillo sobre  $X$  y  $\mathcal{S}_2$  un semianillo sobre  $Y$ . Definimos

$$\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 := \left\{ A \times B : A \in \mathcal{S}_1, B \in \mathcal{S}_2 \right\}$$

Muestre que  $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$  es un semianillo sobre  $X \times Y$ .

**12 Ejercicio** (la intersección de dos semianillos no necesariamente es semianillo). Construya dos semianillos  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  sobre un conjunto  $X$  tales que su intersección  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  no sea semianillo. Indicación: se puede trabajar en un conjunto de tres elementos,  $X = \{0, 1, 2\}$ .

## Anillos de conjuntos

**13 Ejercicio.** Demuestre que la operación  $\Delta$  es asociativa y conmutativa. ¿Cuál es el conjunto neutro para esta operación? Dado un conjunto  $A$ , encuentre un conjunto  $B$  tal que  $A \Delta B = \emptyset$ .

**14 Ejercicio.** Demuestre que la operación  $\cap$  es asociativa y conmutativa.

**15 Ejercicio.** Demuestre la ley distributiva entre  $\Delta$  y  $\cap$ :

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C).$$

**16 Definición** (definición del anillo de conjuntos a través de  $\Delta$  y  $\cap$ ). Escriba la definición de *anillo de conjuntos* en términos de las operaciones  $\Delta$  y  $\cap$ . Notemos que en la definición de un anillo de conjuntos no se trata de dos operaciones binarias arbitrarias, como en álgebra moderna. Se trata de dos operaciones muy específicas. Las operaciones  $\Delta$  y  $\cap$  tienen propiedades buenas, y no hay necesidad de pedir estas propiedades en la definición del anillo de conjuntos. Por lo tanto, en la definición del anillo de conjuntos se pide solamente que la colección sea cerrada bajo  $\Delta$  y  $\cap$ , y que el conjunto vacío sea un elemento de la colección.

**17 Definición.** Escriba la definición de *álgebra de conjuntos* sobre un conjunto  $X$ .

**18 Ejemplo.** Conjunto-potencia es un álgebra de conjuntos Demuestre que  $2^X$  es un álgebra de conjuntos sobre  $X$ .

**19 Ejercicio.** Expresar algunas operaciones con conjuntos a través de otras:

- $\Delta$  en términos de  $\cup$  y  $\setminus$ .
- $\cap$  en términos de  $\setminus$ .
- $\setminus$  en términos de  $\Delta$ .
- $\cup$  en términos de  $\Delta$  y  $\cap$ .

**20 Ejercicio.** Sea  $\mathcal{A} \subseteq 2^X$  tal que  $\emptyset \in \mathcal{A}$ . Demuestre que  $\mathcal{A}$  es un anillo de conjuntos si, y solo si,  $\mathcal{A}$  es cerrado bajo  $\cup$  y  $\setminus$ .

**21 Ejercicio.** Supongamos que  $\mathcal{A} \subseteq 2^X$  tal que  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}$  es cerrada bajo  $\cup$  y  $\mathcal{A}$  es cerrada bajo  $\setminus$ . Demuestre que  $\mathcal{A}$  es cerrada bajo  $\Delta$  y  $\cap$ .

**22 Ejercicio.** Escriba el criterio de anillo de conjuntos en términos de  $\cup$  y  $\setminus$ . Muchos autores prefieren dar la definición del anillo de conjuntos en términos de  $\cup$  y  $\setminus$ .

**23 Ejemplo** (colecciones de conjuntos, cerradas bajo algunas operaciones y no cerradas bajo otras). Construir un conjunto  $X$  y una colección  $\mathcal{A} \subseteq 2^X$  con las siguientes propiedades:

- (a)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,
- (b)  $\mathcal{A}$  es cerrada bajo  $\cup$ ,
- (c)  $\mathcal{A}$  es cerrada bajo  $\Delta$ ,
- (d)  $\mathcal{A}$  no es cerrada bajo  $\setminus$ .

Este ejemplo muestra que las condiciones (a), (b), (c) no definen un anillo de conjuntos.

**24 Ejemplo** (colecciones de conjuntos, cerradas bajo algunas operaciones y no cerradas bajo otras). Construir un conjunto  $X$  y una colección  $\mathcal{A} \subseteq 2^X$  con las siguientes propiedades:

- (a)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,
- (b)  $\mathcal{A}$  es cerrada bajo  $\cap$ ,
- (c)  $\mathcal{A}$  es cerrada bajo  $\setminus$ ,
- (d)  $\mathcal{A}$  no es cerrada bajo  $\cup$ .

Este ejemplo muestra que las condiciones (a), (b), (c) no definen un anillo de conjuntos.

**25 Ejercicio** (cualquier anillo de conjuntos es un semianillo de conjuntos). Sea  $\mathcal{A}$  un anillo sobre un conjunto  $X$ . Demuestre que  $\mathcal{A}$  es un semianillo sobre  $X$ .

**26 Ejercicio** (la intersección de anillos es un anillo). Sea  $\mathfrak{A}$  un conjunto de anillos sobre un conjunto  $X$ . Demuestre que el conjunto

$$\mathcal{B} := \{Y \subseteq X : \forall A \in \mathfrak{A} \quad Y \in \mathcal{A}\}$$

es un anillo sobre  $X$ .

**27 Definición** (el anillo generado por una colección de conjuntos). Sea  $X$  un conjunto y sea  $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ . Escriba la definición del *anillo generado* por  $\mathcal{C}$ .

**28 Teorema** (descripción del anillo generado por un semianillo). Sea  $\mathcal{S}$  un semianillo sobre un conjunto  $X$ . Denotemos por  $\mathcal{A}$  al conjunto de todas las uniones finitas disjuntas de elementos de  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{A} := \left\{ A \subseteq X : \exists m \in \mathbb{N} \quad \exists P_1, \dots, P_m \in \mathcal{S} \text{ disjuntos a pares, } A = \bigcup_{j=1}^m P_j \right\}.$$

Demuestre que  $\mathcal{A}$  es el anillo generado por  $\mathcal{S}$ .

**29 Ejemplo** (el anillo generado por los subconjuntos unipuntuales de un conjunto). Sea  $X$  un conjunto. Denotemos por  $\mathcal{S}$  a la colección que consiste del conjunto vacío y de todos los subconjuntos unipuntuales de  $X$ :

$$\mathcal{S} := \{\emptyset\} \cup \{\{x\} : x \in X\}.$$

Ya sabemos (Ejemplo 5) que  $\mathcal{S}$  es un semianillo. Describa el anillo generado por  $\mathcal{S}$ .

## Premedidas

**30 Definición.** Escriba la definición de *premedida*.

**31 Ejercicio** (toda premedida es finitamente aditiva). Sea  $X$  un conjunto, sea  $\mathcal{C} \subseteq 2^X$  tal que  $\emptyset \in \mathcal{C}$  y sea  $\mu: \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty]$  una premedida. Demuestre que  $\mu$  cumple con la propiedad “finitamente aditiva condicional”: si  $m \in \mathbb{N}$ ,  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{C}$  son disjuntos a pares y  $\bigcup_{j=1}^m A_j \in \mathcal{C}$ , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right) = \sum_{j=1}^m \mu(A_j).$$

**32 Teorema** (extensión de una premedida de un semianillo al anillo generado). Sea  $\mathcal{S}$  un semianillo de conjuntos y sea  $\lambda: \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$  una premedida. Denotemos por  $\mathcal{A}$  al anillo generado por  $\mathcal{S}$ . Por el Teorema 28, sabemos su descripción explícita. Demuestre que existe una única premedida  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $\mu|_{\mathcal{S}} = \lambda$ . Hay que dar una definición explícita para  $\mu$ . La demostración se puede dividir en las siguientes partes.

- Unicidad. Si hay dos “candidatas”  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , entonces  $\mu_1 = \mu_2$ .
- Si  $A \in \mathcal{A}$  y  $A$  tiene dos descomposiciones en elementos disjuntos de  $\mathcal{S}$ ,

$$A = \bigcup_{j=1}^r P_j, \quad A = \bigcup_{k=1}^s Q_k,$$

entonces

$$\sum_{j=1}^r \lambda(P_j) = \sum_{k=1}^s \lambda(Q_k).$$

- Definición de  $\mu$ . El punto anterior muestra que la definición es consistente.
- Verificación de que  $\mu|_{\mathcal{S}} = \lambda$ .
- Verificación de los axiomas de premedida para  $\mu$ .

## La longitud de semiintervalos es una premedida

En este grupo de problemas trabajamos con  $\mathcal{S}$  del Ejemplo 10:

$$\mathcal{S} := \left\{ [a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \right\}.$$

Ya sabemos que  $\mathcal{S}$  es un semianillo. Definimos  $\lambda: \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$  como la longitud de los intervalos de esta forma:

$$\lambda([a, b)) := b - a \quad (a, b \in \mathbb{R}, a \leq b).$$

Vamos a demostrar que  $\lambda$  es una premedida sobre  $\mathcal{S}$ .

**33 Ejercicio.** Sean  $P_1, \dots, P_m, Q \in \mathcal{S}$  tales que  $P_1, \dots, P_m$  son disjuntos a pares y  $P_k \subseteq Q$  para cada  $k$ . Demuestre que

$$\sum_{k=1}^m \lambda(P_k) \leq \lambda(Q).$$

Sugerencia. Podemos suponer que  $P_k = [a_k, b_k)$ , donde  $a_k < b_k$ . Más aún, podemos suponer que  $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ . Demuestre que  $b_k \leq a_{k+1}$  para cada  $k$  en  $\{1, \dots, m-1\}$ .

**34 Ejercicio.** Sean  $c, d \in \mathbb{R}$  tales que  $c < d$ , y sea  $\mathcal{A}$  una colección finita de intervalos de  $\mathbb{R}$ , abiertos y acotados, tal que

$$[c, d] \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Demuestre que

$$d - c < \sum_{A \in \mathcal{A}} (\sup(A) - \inf(A)).$$

Sugerencia: utilice el teorema de Heine–Borel de la compacidad de intervalos cerrados acotados en  $\mathbb{R}$ .

**35 Ejercicio.** Sea  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathcal{S}$  y sea  $Q$  un elemento de  $\mathcal{S}$  tales que

$$Q \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k.$$

Demuestre que

$$\lambda(Q) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(P_k).$$

**36 Teorema.** Sea  $\mathcal{S}$  el conjunto de los intervalos semiabiertos del eje real:

$$\mathcal{S} := \left\{ [a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \right\}.$$

Definimos la función  $\lambda: \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$  mediante la regla

$$\lambda([a, b)) := b - a \quad (a \leq b).$$

Demuestre que  $\lambda$  es una premedida. Utilice los tres ejercicios (lemas) anteriores.

## Clases monótonas de conjuntos (tema optativo)

**37 Definición.** Escriba la definición de *clase monótona de conjuntos*.

Los siguientes ejercicios de clases monótonas no se incluyen en el examen.

**38 Ejercicio.** Demuestre que la intersección de un conjunto de clases monótonas es una clase monótona.

**39 Teorema.** Sea  $\mathcal{S}$  un anillo de conjuntos. Demuestre que la clase monótona  $\mathcal{M}$  generada por  $\mathcal{S}$  es un  $\sigma$ -anillo de conjuntos. En particular, si  $\mathcal{S}$  es una álgebra de conjuntos sobre  $X$ , entonces  $\mathcal{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ .

**40 Corolario** (descripción del  $\sigma$ -anillo generado a través de la clase monótona generada). Sea  $\mathcal{S}$  un semianillo de conjuntos sobre  $X$ . Denotemos por  $\mathcal{A}$  al anillo generado por  $\mathcal{S}$  y por  $\mathcal{M}$  a la clase monótona generada por  $\mathcal{A}$ . Demuestre que  $\mathcal{M}$  es el  $\sigma$ -anillo generado por  $\mathcal{S}$ . En particular, si  $\mathcal{S}$  es una semiálgebra sobre  $X$ , entonces  $\mathcal{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ .

## Medidas exteriores

**41 Definición.** Sea  $X$  un conjunto y sea  $\varphi: 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  ¿Cuándo se dice que  $\varphi$  es una *medida exterior* sobre  $X$ ?

**42 Ejercicio.** Demuestre que cada medida exterior es finitamente subaditiva.

**43 Ejercicio.** Sea  $X$  un conjunto, sea  $\mathcal{F} = 2^X$  y sea  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  una medida. Demuestre que  $\mu$  es una medida exterior.

**44 Ejercicio.** Sea  $X = \{0, 1\}$ . Construya una medida exterior  $\varphi: X \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $\varphi$  no sea medida.

**45 Ejemplo.** Sea  $X$  un conjunto. Definimos  $\varphi: 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  mediante las siguientes reglas:

- $\varphi(\emptyset) := 0$ .
- $\varphi(A) = 1$ , si  $A$  es un subconjunto unipuntual de  $X$ .
- $\varphi(A) = \sqrt{3}$ , si  $A \subseteq X$  y  $A$  tiene por lo menos dos elementos diferentes.

Demuestre que  $\varphi$  es una medida exterior sobre  $X$ . Demuestre que si  $X$  tiene al menos dos elementos, entonces  $\varphi$  no es medida.

**46 Ejercicio.** Analice las diferencias sobre los conceptos de *medida* y *medida exterior*.

- ¿Qué se supone sobre sus dominios?
- ¿Cuándo una medida es medida exterior?
- Si  $\mathcal{F} = 2^X$ , ¿cuál de los dos conceptos es más fuerte?

**47 Ejercicio** (criterio de medida exterior). Muestre que dos condiciones en la definición de medida exterior se pueden sustituir por una sola condición: si  $A \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ , entonces

$$\varphi(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(B_j).$$

**48 Ejercicio** (hacia la definición de la medida exterior generada por una premedida). Sean  $X$  un conjunto,  $\mathcal{A}$  un anillo de conjuntos sobre  $X$ ,  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  una premedida. Para cada  $Y \subseteq X$ , denotemos por  $\Phi_Y$  a la colección de todas las  $\mathcal{A}$ -cubiertas numerables de  $Y$ :

$$\Phi_Y := \left\{ A \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : Y \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right\}.$$

Para cada sucesión  $A = (A_j)_{j \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ , denotemos por  $S(A)$  la suma de la serie formada por los valores de  $\mu$  en los elementos de  $A$ :

$$S(A) := \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Sean  $Y, Z \subseteq X$  tales que  $Y \subseteq Z$ . Demuestre que

$$\Phi_Z \subseteq \Phi_Y, \quad S[\Phi_Z] \subseteq S[\Phi_Y], \quad \inf(S[\Phi_Y]) \leq \inf(S[\Phi_Z]).$$

**49 Teorema** (la medida exterior generada por una premedida). Sea  $\mathcal{A}$  un anillo de conjuntos sobre  $X$  y sea  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  una premedida.

- Escriba la definición de la medida exterior  $\mu^*: 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  generada por  $\mu$ .
- Demuestre que efectivamente  $\mu^*$  es una medida exterior.
- Demuestre que  $\mu^*(A) = \mu(A)$  para cada  $A$  en  $\mathcal{A}$ .

**50 Ejercicio** (expresión de la medida exterior en términos del semianillo). Sean  $X$  un conjunto,  $\mathcal{S}$  un semianillo,  $\mathcal{A}$  el anillo generado por  $\mathcal{S}$ ,  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  una premedida. Demuestre que para cada  $Y$  en  $2^X$ ,

$$\mu^*(Y) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j) : (S_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}, \quad Y \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j \right\}.$$

En otras palabras, este ejercicio afirma que  $\mu^*$  se expresa en términos de  $\mathcal{S}$ -cubiertas numerables, en vez de  $\mathcal{A}$ -cubiertas numerables.

## Construcción de Carathéodory: $\sigma$ -álgebra y medida asociadas a una medida exterior

En los siguientes problemas se supone que  $\varphi: 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  es una medida exterior.

**51 Definición.** Escriba la definición de conjunto  $\varphi$ -medible (o Carathéodory  $\varphi$ -medible).

Denotamos la colección de los conjuntos  $\varphi$ -medibles por  $\mathcal{C}_\varphi$ .

**52 Ejercicio.** Escriba la definición de medida completa.

**53 Teorema** (sobre la  $\sigma$ -álgebra y la medida asociadas a una medida exterior).  $\mathcal{C}_\varphi$  es una  $\sigma$ -álgebra. La restricción de  $\varphi$  a  $\mathcal{C}_\varphi$ , es decir, la función  $\varphi|_{\mathcal{C}_\varphi}$ , es una medida.

Dividimos la demostración de este teorema en varios ejercicios.

**54 Ejercicio.** Demuestre que  $\mathcal{C}_\varphi$  es una álgebra de conjuntos sobre  $X$ .

**55 Ejercicio.** Sean  $A, B \in \mathcal{C}_\varphi$  disjuntos y  $P \subseteq X$ . Demuestre que

$$\varphi(P \cap (A \cup B)) = \varphi(P \cap A) + \varphi(P \cap B).$$

**56 Ejercicio.** Sean  $m \in \mathbb{N}$ ,  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{C}_\varphi$  mutuamente disjuntos y  $P \subseteq X$ . Demuestre que

$$\varphi\left(P \cap \left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right)\right) = \sum_{j=1}^m \varphi(P \cap A_j).$$

**57 Ejercicio.** Sea  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión disjunta en  $\mathcal{C}_\varphi$  y sea

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Demuestre que  $B \in \mathcal{C}_\varphi$  y

$$\varphi(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n).$$

**58 Ejercicio.** Sean  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A}$  una álgebra de conjuntos sobre  $X$  cerrada bajo uniones numerables disjuntas. Demuestre que  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ .

De los lemas (ejercicios) anteriores se sigue que  $\mathcal{C}_\varphi$  es una  $\sigma$ -álgebra y que la restricción  $\nu$  de  $\varphi$  a  $\mathcal{C}_\varphi$  es una medida.

**59 Ejercicio.** Demuestre que

$$\{A \subseteq X: \varphi(A) = 0\} \subseteq \mathcal{C}_\varphi.$$

Demuestre que  $\nu$  es completa.

**60 Teorema** (teorema de Carathéodory sobre la extensión de una premedida definida en un anillo a la  $\sigma$ -álgebra generada por este anillo). *Enuncie y demuestre el teorema.*

## Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y sus propiedades

En esta sección denotamos por  $\tau$  a la topología en  $\mathbb{R}$ . Sea  $\mathcal{S}$  el semianillo de intervalos semiabiertos, definido en el Ejemplo 10, y sea  $\lambda: \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$  la premedida en  $\mathcal{S}$  definida como la longitud de intervalos. Denotemos por  $\mathcal{A}$  el anillo generado por  $\mathcal{S}$ . Denotemos con la misma letra  $\lambda$  la premedida  $\lambda$  extendida a  $\mathcal{A}$ . Denotamos por  $\lambda^*$  la medida exterior inducida por  $\lambda$ . Definimos la  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue  $\mathcal{F}$  como la colección de Carathéodory  $\mathcal{C}_{\lambda^*}$  asociada a  $\lambda^*$ . Definimos la medida de Lebesgue  $\mu$  como la restricción  $\lambda^*|_{\mathcal{F}}$ :

$$\mathcal{F} := \mathcal{C}_{\lambda^*}, \quad \mu = \lambda^*|_{\mathcal{F}}.$$

**61 Ejercicio.** Sea  $Y \subseteq \mathbb{R}$ . Muestre que

$$\lambda^*(Y) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (p_k - q_k) : p, q \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad p_k \leq q_k, \quad Y \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} [p_k, q_k) \right\}.$$

Utilice el resultado del Ejercicio 50.

**62 Ejercicio.** Explique de manera más detallada cómo se define la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$

**63 Ejercicio.** Sea  $Y \subseteq \mathbb{R}$ . En el Ejercicio 61 ya vimos que  $\lambda^*(Y)$  que involucra  $\mathcal{S}$ -cubiertas, es decir, cubiertas por intervalos de la forma  $[a, b)$ . Demuestre que

$$\lambda^*(Y) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (v_k - u_k) : u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad u_k \leq v_k, \quad Y \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (u_k, v_k) \right\}.$$

En otras palabras,  $\lambda^*$  se expresa en términos de cubiertas por intervalos abiertos de la forma  $(a, b)$ .

**64 Ejercicio.** Demuestre que si  $A \in \tau_{\mathbb{R}}$  y  $A \neq \emptyset$ , entonces  $\mu(A) > 0$ .

**65 Ejercicio.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$ . Demuestre que  $(a, b) \in \mathcal{F}$  y

$$\mu((a, b)) = b - a.$$

Demuestre resultados similares para  $(a, b]$  y  $[a, b]$ .

**66 Ejercicio.** Demuestre que  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$ .

**67 Observación** (tarea adicional). Con el axioma de elección se puede demostrar que  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \neq \mathcal{F}$ . Un posible camino es usar la función conocida como la “escalera de Cantor”.

**68 Ejercicio** (criterio de conjunto de Lebesgue de medida cero). Sea  $Y \subseteq \mathbb{R}$ . Demuestre que las siguientes dos condiciones son equivalentes.

(a)  $Y \in \mathcal{F}$  y  $\mu(Y) = 0$ .

(b) Para cada  $\varepsilon > 0$  existen  $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  tales que  $u_k < v_k$  para cada  $k$  en  $\mathbb{N}$ ,

$$Y \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (u_k, v_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} (v_k - u_k) < \varepsilon.$$

**69 Ejercicio** (regularidad por arriba de la medida de Lebesgue). Sea  $Y \in \mathcal{F}$ . Demuestre que para cada  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto  $A \in \tau$  tal que  $Y \subseteq A$  y

$$\mu(A) < \mu(Y) + \varepsilon.$$

Como consecuencia,

$$\mu(Y) = \inf \{ \mu(A) : A \in \tau, Y \subseteq A \}.$$

**70 Ejercicio.** Es una versión más precisa del Ejercicio 69. Sea  $Y \in \mathcal{F}$ . Demuestre que para cada  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto  $A \in \tau$  tal que  $Y \subseteq A$  y

$$\mu(A \setminus Y) < \varepsilon.$$

**71 Ejercicio** (regularidad por abajo de la medida de Lebesgue). Sea  $Y \in \mathcal{F}$  tal que  $\mu(Y) < +\infty$ . Demuestre que para cada  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto compacto  $C \subseteq Y$  tal que  $\mu(Y \setminus C) < \varepsilon$ .

**72 Ejercicio** (invarianza bajo traslaciones de la medida de Lebesgue). Demuestre que para cualquier  $Y$  en  $\mathcal{F}$  y cualquier  $b$  en  $\mathbb{R}$ ,

$$\mu(Y + b) = \mu(Y).$$

Sugerencias. Se recomienda demostrar las siguientes afirmaciones.

- Si  $A \in \mathcal{S}$  y  $b \in \mathbb{R}$ , entonces  $A + b \in \mathcal{S}$  y

$$\lambda(A + b) = \lambda(A).$$

- Si  $Y \subseteq \mathbb{R}$  y  $b \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\lambda^*(Y + b) = \lambda^*(Y).$$

- Si  $Y \in \mathcal{F}$  y  $b \in \mathbb{R}$ , entonces  $Y + b \in \mathcal{F}$ .

## Existencia de un conjunto no Lebesgue-medible

Antes de estudiar el ejemplo de Vitali, veremos su versión simplificada (que todavía no sirve para el propósito principal).

**73 Ejercicio** (una variación del ejemplo de Vitali). Explique brevemente la definición del conjunto  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ . Usando el axioma de elección, elegimos un conjunto  $W \subseteq \mathbb{R}$  tal que para cada  $C \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$  la intersección  $W \cap C$  es un conjunto unipuntual.

I. Demuestre que  $W$  es no numerable.

II. Demuestre que la colección  $W + \mathbb{Q}$ , esto es,  $\{W + q: q \in \mathbb{Q}\}$  es una partición del conjunto  $\mathbb{R}$ .

III. Demuestre que si  $W \in \mathcal{F}$ , entonces  $\mu(W) = +\infty$ . Aquí  $\mathcal{F}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue y  $\mu$  es la medida de Lebesgue. Se puede usar el hecho que  $\mu$  es invariante bajo traslaciones.

Observación. En realidad,  $W \notin \mathcal{F}$ , pero es difícil demostrarlo, y en este ejercicio no se propone hacerlo. En la solución del ejercicio no está permitido usar las propiedades del conjunto de Vitali; la idea es trabajar directamente con el conjunto  $W$  de manera similar.

**74 Problema** (ejemplo de Vitali). Estudiar el ejemplo de Vitali de conjunto no Lebesgue-medible.

## Aproximación de funciones medibles por funciones continuas (tareas adicionales, no se incluyen en el examen)

**75 Problema** (teorema de Luzin). Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que  $\alpha < \beta$ . Denotemos por  $\mathcal{F}$  a la  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue en el intervalo  $[\alpha, \beta]$  y por  $\mu$  a la medida de Lebesgue restringida a este intervalo. Sea  $f \in \mathcal{M}([\alpha, \beta], \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$  y sea  $\eta > 0$ . Demuestre que existe un conjunto cerrado  $K \subseteq [\alpha, \beta]$  tal que  $f|_K$  es continua y  $\mu([\alpha, \beta] \setminus K) < \eta$ .

**76 Problema.** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que  $\alpha < \beta$ . Denotemos por  $\mathcal{F}$  a la  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue en el intervalo  $[\alpha, \beta]$  y por  $\mu$  a la medida de Lebesgue restringida a este intervalo. Sea  $f \in \mathcal{M}([\alpha, \beta], \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$  y sea  $\eta > 0$ . Demuestre que existe una función continua  $g \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C})$  tal que

$$\sup_{x \in [\alpha, \beta]} |g(x)| \leq \|f\|_\infty \quad \text{y} \quad \mu\left(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}\right) < \eta.$$