Integración sobre productos de espacios

Problemas para examen

Álgebra y σ-álgebra generadas por una semiálgebra de conjuntos

1 Ejercicio. Escribir la definición del *semianillo de conjuntos*. Escribir la definición de la *semiálgebra de conjuntos sobre un conjunto total* X.

2 Ejercicio. Escribir la definición del *anillo de conjuntos*. Escribir la definición del *álgebra de conjuntos sobre un conjunto total* X.

3 Ejercicio. Sea X un conjunto y sea Φ un conjunto de anillos de conjuntos sobre X. Denotemos por $\mathcal{A}$ a la intersección de todos los anillos pertenecientes a Φ:

$$\mathcal{A} \coloneqq \cap\Phi = \bigcap_{\mathcal{R}\in\Phi} \mathcal{R} = \{Y \subseteq X: \quad \forall \mathcal{R} \in \Phi \quad Y \in \mathcal{R}\}.$$

Demostrar que $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.

4 Ejercicio. Sea $\mathcal{C}$ una colección de conjuntos sobre X, esto es, $\mathcal{C} \subseteq 2^X$. Definimos el *anillo de conjuntos generado por* $\mathcal{C}$ como la intersección de todos los anillos sobre X que contienen a $\mathcal{C}$. En otras palabras, definimos el anillo de conjuntos generado por $\mathcal{C}$ como

$$\mathcal{A} \coloneqq \cap\Phi,$$

donde

$$\Phi \coloneqq \{\mathcal{R} \subseteq 2^X: \quad \mathcal{R} \text{ es un anillo y } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}\}.$$

Por el Ejercicio 3, $\mathcal{A}$ es un anillo. Mostrar que $\mathcal{A}$ el más pequeño entre todos los anillos que contienen a $\mathcal{C}$.

5 Ejercicio. Sea X un conjunto y sea Φ un conjunto de álgebras de conjuntos sobre X. Denotemos por $\mathcal{A}$ a la intersección de todos los elementos de Φ:

$$\mathcal{A} \coloneqq \cap\Phi = \bigcap_{\mathcal{R}\in\Phi} \mathcal{R} = \{Y \subseteq X: \quad \forall \mathcal{R} \in \Phi \quad Y \in \mathcal{R}\}.$$

Demostrar que $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos sobre X.

6 Ejercicio. Dado un conjunto X y una colección de conjuntos $\mathcal{C} \subseteq 2^X$, definir el *álgebra de conjuntos sobre* X *generada por* $\mathcal{C}$. Usar la idea del Ejercicio 4, pero en vez de "anillo de conjuntos" poner la frase "álgebra de conjuntos sobre X".

7 Ejercicio (descripción del anillo generado por un semianillo)**.** Sea $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ un anillo de conjuntos. Denotemos por $\mathcal{A}$ al conjunto de todos los subconjuntos de X que se pueden representar como uniones finitas disjuntas de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{S}$.

- Demostrar que $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos.
- Demostrar que $\mathcal{A}$ es el mínimo entre todos los anillos que contienen a $\mathcal{S}$. En otras palabras, demostrar que si $\mathcal{R}$ es un anillo que contiene a $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{R}$.

8 Ejercicio (descripción del álgebra generada por una semiálgebra)**.** Sea $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ una semiálgebra de conjuntos sobre X. Denotemos por $\mathcal{A}$ al conjunto de todos los subconjuntos de X que se pueden representar como uniones finitas disjuntas de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{S}$. Demostrar que $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos sobre X. Demostrar que $\mathcal{A}$ es la mínima entre todas las álgebras de conjuntos sobre X que contienen a $\mathcal{S}$.

9 Ejercicio. Escribir la definición de la clase monótona de conjuntos.

10 Ejercicio (cada $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra es un álgebra y una clase monótona)**.** Explicar por qué cada σ-álgebra es un álgebra y una clase monótona.

11 Ejercicio (álgebra + clase monótona = sigma-álgebra)**.** Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de conjuntos sobre X y al mismo tiempo una clase monótona. Demostrar que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

12 Ejercicio (la intersección de un conjunto de clases monótonas es una clase monótona)**.** Sea Φ un conjunto de clases monótonas sobre X. Sea $\mathfrak{M} := \cap\Phi$. Demuestre que $\mathfrak{M}$ también es una clase monótona.

13 Ejercicio (la clase monótona generada por una colección de conjuntos)**.** Sea $\mathcal{C}$ una colección de conjuntos sobre X, esto es, $\mathcal{C} \subseteq 2^X$. Definimos la clase monótona generada por $\mathcal{C}$, como la intersección de todas las clases monótonas sobre X que contienen a $\mathcal{C}$. Por el Ejercicio 12, esta intersección es una clase monótona. Obviamente, es la más pequeña entre todas las clases monótonas que contienen a $\mathcal{C}$.

14 Ejercicio (teorema sobre la clase monótona generada por un álgebra de conjuntos)**.** Sea $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ un álgebra de conjuntos sobre X y sea $\mathfrak{M}$ la clase monótona generada por $\mathcal{E}$. Demostrar que $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra.

I. Para cada $P \subseteq X$, definimos

$$\Omega(P) := \{Q \subseteq X \colon\ P \cup Q \in \mathfrak{M}, \quad P \setminus Q \in \mathfrak{M}, \quad Q \setminus P \in \mathfrak{M}\}.$$

Demostrar que $\Omega(P)$ es una clase monótona.

II. Usando el resultado de I demostrar $\mathfrak{M}$ es un anillo. Esta parte es una secuencia de pasos lógicos usando el resultado del inciso I y la definición de $\mathfrak{M}$.

III. Mostrar que $\mathfrak{M}$ es un álgebra y una σ-álgebra.

15 Ejercicio (la sigma-álgebra generada por un álgebra de conjuntos es lo mismo que la clase monótona generada por esta álgebra)**.** En la situación del Ejercicio 14, mostrar que $\mathfrak{M}$ es la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$.

16 Ejercicio (descripción de la σ-álgebra generada por una semiálgebra)**.** Sea $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ una semiálgebra sobre X, sea $\mathcal{E}$ el álgebra generada por $\mathcal{S}$ y sea $\mathfrak{M}$ la clase monótona generada por $\mathcal{E}$. Demostrar que $\mathfrak{M}$ es la σ-álgebra generada por $\mathcal{S}$.

Producto de σ-álgebras

17 Ejercicio (el "producto cartesiano" de semianillos)**.** Sea $\mathcal{F}$ un semianillo sobre X y sea $\mathcal{G}$ un semianillo sobre Y. Demostrar que la siguiente colección de conjuntos es un semianillo sobre $X \times Y$:

$$\mathcal{S} := \{A \times B\colon \quad A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}\}.$$

18 Ejercicio (el producto cartesiano de semianillos no es el producto cartesiano en el sentido general)**.** Recordemos que el producto cartesiano (o el producto directo) de dos conjuntos V y W se define como el conjunto de los pares ordenados (v, w), donde $v \in V$ y $w \in W$. Esta definición se puede aplicar a dos colecciones $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, en particular, a dos semianillos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$. Explicar que el producto cartesiano $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ en el sentido de la definición general del producto cartesiano no coincide con la colección de conjuntos $\mathcal{S}$ del Ejercicio 17.

19 Ejercicio. el producto cartesiano de semiálgebras Sea $\mathcal{F}$ una semiálgebra sobre X y sea $\mathcal{G}$ una semiálgebra sobre Y. Demostrar que la colección $\mathcal{S}$, definida en el Ejercicio 17, es una semiálgebra sobre $X \times Y$.

20 Ejercicio (los "rectángulos medibles" forman una semiálgebra)**.** Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$ espacios medibles. Sea

$$\mathcal{S} := \big\{A \times B\colon \quad A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}\big\}.$$

Explicar por qué $\mathcal{S}$ es una semiálgebra sobre $X \times Y$.

21 Ejercicio (los "rectángulos medibles" no siempre forman una σ-álgebra)**.** Encontrar espacios medibles $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$ tales que la colección $\mathcal{S}$ del Ejercicio 20 no sea σ-álgebra.

22 Ejercicio (el producto de σ-álgebras)**.** Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(Y, \mathcal{G})$ espacios medibles. Denotamos por $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ la σ-álgebra generada por el semianillo

$$\{A \times B\colon \quad A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}\}.$$

Como corolarios de lo anterior se obtienen las siguientes afirmaciones.

23 Ejercicio (los conjuntos elementales forman un álgebra de conjuntos)**.** Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$ espacios medibles, y sea

$$\mathcal{S} := \{A \times B\colon \quad A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}\}.$$

Denotemos por $\mathcal{E}$ a la colección de todos los subconjuntos de $X \times Y$ que se pueden representar como uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{S}$. Entonces $\mathcal{E}$ es el álgebra de conjuntos generada por la semiálgebra $\mathcal{S}$.

24 Ejercicio (el producto de σ-álgebras es la clase monótona más pequeña que contiene a todos los conjuntos elementales)**.** Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$ espacios medibles. Definimos $\mathcal{S}$ y $\mathcal{E}$ como en el problema anterior. Entonces $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ es la clase monótona más pequeña que contiene a $\mathcal{E}$.

Secciones de conjuntos

25 Ejercicio (proyecciones naturales sobre la primera y la segunda componente)**.** Sean X, Y conjuntos. Definimos $\pi_1\colon X \times Y \to X$ mediante la regla

$$\pi_1((x,y)) \coloneqq x.$$

Escribir la definición de $\pi_2\colon X \times Y \to Y$.

26 Ejercicio (la “recta vertical” y la “recta horizontal” en términos de las proyecciones naturales)**.** Sean X, Y conjuntos.

- Sea $a \in X$. Expresar $\{a\} \times Y$ en términos de π_1, π_2 y a.
- Sea $b \in Y$. Expresar $X \times \{b\}$ en términos de π_1, π_2 y b.

27 Ejercicio (secciones de conjuntos)**.** Sea $C \subseteq X \times Y$ y sea $a \in X$. Pongamos

$$C_a \coloneqq \{y \in Y\colon\ (a,y) \in C\},$$

Sea $C \subseteq X \times Y$ y sea $b \in Y$. Pongamos

$$C^y \coloneqq \{x \in X\colon\ (x,b) \in C\}.$$

Expresar C_a y C^b en términos de π_1, π_2, a y b.

28 Ejercicio (secciones de conjuntos como preimágenes)**.** Sean X, Y algunos conjuntos y sea $a \in X$. Sea $J_a\colon Y \to X \times Y$ la siguiente función:

$$\forall y \in Y \qquad J_a(y) \coloneqq (a,y).$$

Mostrar que para cada $C \subseteq X \times Y$,

$$C_a = J_a^{-1}[C].$$

29 Ejercicio (algunas propiedades de secciones de conjuntos)**.** Sean X, Y algunos conjuntos, $a \in X$.

I. Demostrar que $\varnothing_a = \varnothing$.

II. Sea $(C_j)_{j\in J}$ una familia de subconjuntos de $X \times Y$ y sea

$$D \coloneqq \bigcup_{j\in J} C_j.$$

Demostrar que

$$D_a = \bigcup_{j\in J} (C_j)_a.$$

III. Sea $(C_j)_{j\in J}$ una familia de subconjuntos de $X \times Y$ y sea

$$E \coloneqq \bigcap_{j\in J} C_j.$$

Demostrar que

$$E_a = \bigcap_{j\in J} (C_j)_a.$$

IV. Sean $C_1, C_2 \subseteq X \times Y$ tales que $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Demostrar que $(C_1)_a \cap (C_2)_a = \varnothing$.

30 Ejercicio. Demuestre propiedades de secciones de la forma C^b, $b \in Y$, similares a las propiedades del Ejercicio 29.

31 Ejercicio (las secciones de los "rectángulos")**.** Sean X, Y conjuntos, $P \subseteq X$, $Y \subseteq Y$, $a \in X$. Demostrar que

$$(P \times Q)_a = \begin{cases} Q, & a \in P; \\ \varnothing, & a \in X \setminus P. \end{cases}$$

Sea $b \in Y$. Demostrar que

$$(P \times Q)^b = \begin{cases} P, & b \in Q; \\ \varnothing, & b \in Y \setminus Q. \end{cases}$$

32 Ejercicio (las secciones verticales de los conjuntos medibles son medibles)**.** Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$ espacios medibles y sea $a \in X$. Mostrar que

$$\forall C \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \qquad C_a \in \mathcal{G}.$$

Sugerencia: considerar la colección de conjuntos

$$\Omega \coloneqq \{C \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \colon\ C_a \in \mathcal{G}\},$$

mostrar que $\mathcal{S} \subseteq \Omega$ y que Ω es una σ-álgebra. Concluir que $\Omega = \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.

33 Ejercicio (las secciones horizontales de los conjuntos medibles son medibles)**.** Enunciar y resolver un análogo del Ejercicio 32 para las secciones de la forma C^b, $b \in Y$.

0.1. Secciones de funciones

34 Ejercicio (las secciones horizontales de una función medible son medibles)**.** Sea $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathbb{C})$ y sea $b \in Y$. Definamos $f^b \colon X \to \mathbb{C}$ mediante la fórmula

$$f^b(x) \coloneqq f(x, b).$$

Demostrar que $f^b \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

35 Ejercicio (las secciones verticales de una función medible son medibles)**.** Enunciar y demostrar un resultado similar para

$$f_a(y) \coloneqq f(a, y).$$

El producto de medidas

La siguiente teoría se puede desarrollar para las medidas σ-finitas, pero en el examen será suficiente restringirse a las medidas finitas.

Es cómodo definir el producto de medidas a través de integrales. La idea es medir las secciones ("a lo largo o lo ancho") y luego integrar.

36 Ejercicio (medibilidad de la función que se define por medio de "medidas de secciones verticales")**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, donde μ y ν son medidas σ-finitas. Para todo C en $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ definamos $\varphi_C \colon X \to [0, +\infty]$ mediante la regla

$$\varphi_C(x) \coloneqq \nu(C_x).$$

Demostrar que para cada C en $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ la función φ_C es $\mathcal{F}$-medible, es decir, $\varphi_C \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Sugerencia: considerar la colección

$$\Omega \coloneqq \{C \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}: \quad \varphi_C \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])\}.$$

Demuestrar que $\mathcal{S} \subseteq \Omega$ y que Ω es una σ-álgebra.

37 Ejercicio (definición del producto de medidas)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, donde μ y ν son medidas σ-finitas. Definimos $\mu \times \nu \colon \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ como

$$(\mu \times \nu)(C) \coloneqq \int\limits_X \varphi_C \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostrar que $\mu \times \nu$ es una medida.

38 Ejercicio. la medida de un "rectángulo medible" Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, donde μ y ν son medidas σ-finitas, y sean $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$, $C \coloneqq A \times B$. Demostrar que

$$\int\limits_X \varphi_C \, \mathrm{d}\mu = \mu(A)\nu(B),$$

esto es, $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

En vez de medir las secciones verticales, podemos medir las secciones horizontales. Demostremos que los dos caminos dan el mismo resultado.

39 Ejercicio (medibilidad de la función que se define por medio de "medidas de secciones horizontales")**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, donde μ y ν son medidas σ-finitas. Para todo C en $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ definamos $\psi_C \colon Y \to [0, +\infty]$ mediante la regla

$$\psi_C(y) \coloneqq \mu(C^y).$$

Demostrar que para cada C en $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ la función ψ_C es $\mathcal{G}$-medible, es decir, $\varphi_C \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, [0, +\infty])$. Sugerencia: similar al Ejercicio 36.

40 Ejercicio. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, donde μ y ν son medidas σ-finitas, y sean $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$, $C \coloneqq A \times B$. Demostrar que

$$\int_Y \psi_C \, \mathrm{d}\nu = \mu(A)\nu(B),$$

41 Ejercicio (teorema sobre el producto de medidas: medir "a lo largo" y "a lo ancho" da el mismo resultado)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, donde μ y ν son medidas σ-finitas. Para todo $C \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ definamos las funciones φ_C y y ψ_C como en los Ejercicios 36 y 39. Demostrar que para todo C en $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$,

$$\int_X \varphi_C \, \mathrm{d}\mu = \int_Y \psi_C \, \mathrm{d}\nu.$$

Sugerencia: considerar la colección

$$\Omega \coloneqq \left\{ C \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \colon \quad \int_X \varphi_C \, \mathrm{d}\mu = \int_Y \psi_C \, \mathrm{d}\nu \right\},$$

demuestrar que $\mathcal{S} \subseteq \Omega$ (revisar los problemas anteriores) y que Ω es una σ-álgebra.

42 Ejercicio (otra fórmula para el producto de medidas)**.** Debido al teorema demostrado en el Ejercicio 41,

$$(\mu \times \nu)(C) = \int_Y \psi_C \, \mathrm{d}\nu.$$

43 Ejercicio (contraejemplo)**.** Construya algunos espacios de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ y algún conjunto $C \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ tales que

$$\int_X \varphi_C \, \mathrm{d}\mu \neq \int_Y \psi_C \, \mathrm{d}\nu.$$

Teoremas de Tonelli y Fubini

44 Ejercicio (el teorema de Tonelli)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, donde μ y ν son medidas σ-finitas. Para cada función f en $\mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, [0, +\infty])$ definamos las funciones $\varphi_f \colon X \to [0, +\infty]$ y $\psi_f \colon Y \to [0, +\infty]$ de la siguiente manera:

$$\forall x \in X \qquad \varphi_f(x) \coloneqq \int_Y f_x \, \mathrm{d}\nu = \int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y),$$

$$\forall y \in Y \qquad \psi_f(y) \coloneqq \int_X f^y \, \mathrm{d}\nu = \int_X f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Demostrar que para cada f en $\mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \times \nu)$

$$\int\limits_X \varphi_f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int\limits_Y \psi_f \,\mathrm{d}\nu.$$

45 Ejercicio (el teorema de Fubini para las funciones reales)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, donde μ y ν son medidas σ-finitas. Sea $f \in L^1(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \times \nu, \mathbb{R})$. Demostrar que $f_x \in L^1(Y, \mathcal{G}, \nu, \mathbb{R})$ para casi todos $x \in X$ y se cumple la fórmula:

$$\int\limits_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

46 Ejercicio. Demostrar el teorema de Fubini para las funciones complejas.

47 Ejercicio (contraejemplo que muestra la importancia de la integrabilidad absoluta en el teorema de Fubini)**.** Consideremos el intervalo $X = Y = (0, 1)$ con la medida de Lebesgue μ definida en la σ-álgebra de Lebesgue $\mathcal{F}$. Encontrar una función f de clase $\mathcal{M}(X \times X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}, \mathbb{R})$ tal que

$$\int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \neq \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y).$$

Ejemplo de aplicación del teorema de Fubini

48 Ejercicio. Verificar que para cada $x > 0$ se cumple la fórmula

$$\frac{1}{x} = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Usando la fórmula (1) y el teorema de Fubini demostrar que

$$\lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^A \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$