Integral de Lebesgue

Problemas para examen

Casi en todos los problemas de esta lista se supone que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

Primero definimos la integral para funciones simples medibles positivas, luego para funciones medibles positivas, luego para funciones medibles reales (pidiendo que la integral del valor absoluto sea finita) y para funciones medibles complejas (pidiendo que la integral del valor absoluto sea finita).

Integración de funciones simples medibles positivas

1. La representación canónica de una función simple positiva (repaso). Sea X un conjunto y sea $f\colon X \to [0,+\infty)$ una función *simple*. Lo último significa que el conjunto de los valores de f es finito. Numeramos los valores de f en el orden estrictamente creciente:

$$\operatorname{im}(f) = \{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad 0 \le v_1 < v_2 < \ldots < v_m < +\infty,$$

y para cada j definimos el conjunto P_j como la preimagen de $\{v_j\}$ bajo f:

$$P_j \coloneqq f^{-1}[\{v_j\}].$$

Entonces los conjuntos $P_1, \ldots, P_m$ son no vacíos y disjuntos a pares, $\bigcup_{j=1}^m P_j = X$, y

$$f = \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

2. Funciones simples medibles positivas (repaso). Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f\colon X \to [0,+\infty)$ una función simple, dada por su representación canónica, está escrito arriba. Demostrar que $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0,+\infty))$ si, y solo si,

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad P_j \in \mathcal{F}.$$

Denotamos por $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0,+\infty))$ el conjunto de todas las funciones $X \to [0,+\infty)$ que son simples y $\mathcal{F}$-medibles.

3. Recordar la definición de la integral de Lebesgue de una función simple medible positiva dada por su representación canónica.

4. La integral de una función simple medible positiva dada por una representación generalizada. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sean $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{F}$ conjuntos disjuntos tales que $X = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} Q_k$ y sean $w_1, \ldots, w_n \in [0,+\infty)$. Algunos de los números

$w_1, \dots, w_n$ pueden coincidir, y algunos de los conjuntos $Q_1, \dots, Q_m$ pueden ser vacíos. Consideremos la función $f\colon X \to [0, +\infty)$,

$$f := \sum_{k=1}^{n} w_k \mathbb{1}_{Q_k}.$$

Construir la representación canónica de f y demostrar que

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} w_k \mu(Q_k).$$

5. Integración de una función simple medible positiva sobre un conjunto medible. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Denotamos $\mathcal{F} \cap 2^A$ por $\mathcal{F}_A$ y denotamos $\mu|_{\mathcal{F}_A}$ por μ_A. Sabemos que $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ es un espacio de medida. Dada una función f en $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$, pongamos

$$\int\limits_A f \, \mathrm{d}\mu := \int\limits_A f|_A \, \mathrm{d}\mu_A.$$

Demostrar que si f tiene representación canónica $f = \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbb{1}_{P_j}$, entonces

$$\int\limits_A f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} v_j \mu(P_j).$$

Demostrar que

$$\int\limits_A f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \, \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu.$$

6. La integral de una función simple medible positiva, considerada como una función del conjunto de integración, es una medida. Sea $f\colon X \to [0, +\infty)$ una función simple $\mathcal{F}$-medible positiva. Se considera la función $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ definida mediante la fórmula

$$\varphi(Y) := \int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu \qquad (Y \in \mathcal{F}).$$

Basándose solamente en la definición de la integral para funciones simples medibles positivas, demostrar que φ es una medida.

7. La integral de una función simple que toma sólo un valor en el conjunto de integración. Sea $f\colon X \to [0, +\infty)$ una función simple $\mathcal{F}$-medible positiva y sea $Y \in \mathcal{F}$ un conjunto tal que f toma sólo un valor $w \in [0, +\infty)$ en todos los puntos de Y:

$$\forall x \in Y \qquad f(x) = w.$$

Basándose sólo en la definición de la integral para funciones simples medibles positivas, demostrar que

$$\int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu = w \, \mu(Y).$$

8. Ejemplo, cuando la integral de una función simple medible positiva es cero, aunque el conjunto de integración tiene medida no nula y la función es no nula en algunos puntos del conjunto de integración. Dar un ejemplo de un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$, una función medible positiva simple $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y un conjunto medible $Y \in \mathcal{F}$ tales que

$$\int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu = 0 \qquad \wedge \qquad \mu(Y) > 0 \qquad \wedge \qquad (\exists x \in Y \quad f(x) > 0) \, .$$

Integración de funciones medibles positivas

9. Escribir la definición de la integral de Lebesgue de una función medible positiva.

10. Enunciar y demostrar propiedades elementales de funciones medibles positivas.

11. Desigualdad de Márkov. Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $v > 0$. Demostrar que

$$\mu\left(\{x \in X \colon \ f(x) \geq v\}\right) \leq \frac{1}{v} \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

12. Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $Y \in \mathcal{F}$ tales que

$$\int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Demostrar que

$$\mu\left(\{x \in Y \colon \ f(x) = +\infty\}\right) = 0.$$

13. ¿Cuándo la integral de una función medible positiva es nula? Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mu, [0, +\infty])$ una función tal que

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Demostrar que $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0$.

14. Criterio de que la integral de una función medible positiva sobre un conjunto medible es igual a cero. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $Y \in \mathcal{F}$. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que

$$\int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Demostrar que la condición encontrada es necesaria y suficiente.

15. Desigualdad de Márkov–Chebyshov para una composición de funciones positivas. Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $Y \in \mathcal{F}$, $g\colon [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ una función creciente, $v \geq 0$ tal que $g(v) > 0$. Demostrar que

$$\mu\left(\{x \in X\colon\ f(x) \geq v\}\right) \leq \frac{1}{g(v)} \int\limits_X g \circ f \,\mathrm{d}\mu.$$

Convergencia de integrales de funciones medibles positivas

16. Ejemplos cuando no tiene caso la convergencia de las integrales. Dé un ejemplo de un espacio de medida finita $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y una sucesión de funciones $\mathcal{F}$-medibles $f_n\colon X \to [0, +\infty)$ tales que f_n converge puntualmente a una función $g\colon X \to [0, +\infty)$, pero

$$\int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \not\to \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Se recomienda construir varios ejemplos cuando la sucesión de las integrales $\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$ no tiene límite y otros ejemplos cuando esta sucesión tiene límite, pero el límite no coincide con la integral $\int_X g \,\mathrm{d}\mu$.

17. Una parte de la demostración del teorema de la convergencia monótona. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones $\mathcal{F}$-medibles, $f_n\colon X \to [0, +\infty)$, y sea $s\colon X \to [0, +\infty)$ una función simple $\mathcal{F}$-medible positiva tal que

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) \geq s(x).$$

Demuestre que para todo $c \in (0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geq c \int\limits_X s \,\mathrm{d}\mu.$$

18. Teorema de la convergencia monótona (creciente). Enuncie el teorema y escriba y complete su demostración basándose en el resultado del problema anterior.

19. Teorema de la convergencia decreciente. Enuncie y demuestre el teorema de la convergencia decreciente.

20. Demuestre con un ejemplo que en el teorema de la convergencia decreciente la condición "$f_1 \in L_1(\mu)$" no se puede omitir. En otras palabras, construya una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que decrece en cada punto y

$$\int\limits_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu \neq \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

21. Propiedad aditiva de la integral en el caso de funciones positivas. Sean $f, g\colon X \to [0, +\infty]$ funciones $\mathcal{F}$-medibles positivas. Demuestre que

$$\int\limits_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

22. Propiedad $\boldsymbol{\sigma}$-aditiva de la integral en el caso de funciones positivas. Sean $f_n\colon X \to [0, +\infty]$ funciones $\mathcal{F}$-medibles positivas. Denotemos por g la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$:

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in X).$$

Demuestre que

$$\int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

23. Sea $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ tal que $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente y $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = X$, y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{Y_n} f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

24. Cada serie numérica de números positivos se puede considerar como una integral de Lebesgue. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0, +\infty]$, es decir, $a\colon \mathbb{N} \to [0, +\infty]$. Consideremos $\mathbb{N}$ como un espacio de medida: $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \nu)$, donde ν es la medida de conteo:

$$\nu(A) := \begin{cases} |A|, & \text{si } A \text{ es finito;} \\ +\infty, & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

Recordamos que la suma de la serie se define como el límite de las sumas parciales:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n := \lim_{k\to\infty} \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\le k}} a_n.$$

Demuestre que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \int\limits_{\mathbb{N}} a\,\mathrm{d}\nu.$$

25. Intercambio de sumas de números positivos. Sean $a_{j,k} \in [0, +\infty]$ para todos $j, k \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{j.k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{j,k}.$$

Medida generada por una función medible positiva

26. Medida generada por una función medible positiva. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Demuestre que la función $\varphi\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$, definida mediante la siguiente fórmula, es una medida:

$$\varphi(Y) := \int_Y f \, \mathrm{d}\mu \qquad (Y \in \mathcal{F}).$$

27. Sean $X, \mathcal{F}, \mu, f, \varphi$ los mismos que en el ejercicio anterior. Demuestre que para toda g en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,

$$\int_X g \, \mathrm{d}\varphi = \int_X fg \, \mathrm{d}\mu.$$

28. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ una función cuyo conjunto de valores es numerable:

$$\mathcal{R}(f) = \{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Para todo k en $\mathbb{N}$ denotemos por A_k a la preimagen del conjunto $\{v_k\}$ bajo la función f:

$$A_k := f^{-1}[\{v_k\}].$$

Demuestre que

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} v_k \mu(A_k).$$

29. Demuestre que

$$\int_0^1 \frac{1 + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Integral de Lebesgue de funciones reales y complejas

30. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Muestre que

$$\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_X f_+\,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \wedge \quad \int_X f_-\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

31. Recordar la definición del conjunto $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$. Sean $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$, $Y \in \mathcal{F}$. Recuerde la definición de $\int_Y f\,\mathrm{d}\mu$.

32. La parte positiva de la suma no necesariamente coincide con la suma de las partes positivas. Dé un ejemplo de funciones $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ tales que $(f+g)_+ \neq f_+ + g_+$.

33. La integral de la suma de funciones reales. Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$. Demuestre que

$$\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Puede usar propiedades de la integral de Lebesgue de funciones positivas.

34. La integral del producto de un número negativo por una función real. Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ una función integrable con valores reales y sea $\alpha < 0$. Demuestre que

$$\int_X (\alpha f)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

Sugerencia: usar propiedades de la integral de Lebesgue de funciones positivas.

35. Integral del producto de un número complejo por una función compleja. Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\int_X (\alpha f)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

36. Transformación de un número complejo en un número positivo por medio de una rotación. Este ejercicio sirve como un lema para el siguiente teorema. Sea $z \in \mathbb{R}$. Construya un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z \geq 0$.

37. Teorema sobre el valor absoluto de la integral. Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Demuestre que

$$\left| \int_X f\,d\mu \right| \leq \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

Teorema de convergencia dominada

38. Teorema de la convergencia dominada. Enunciar y demostrar el teorema de la convergencia dominada (de Lebesgue).

39. Teorema de la convergencia uniforme. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita ($\mu(X) < +\infty$) y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones tales que:

i) $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

ii) $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$;

iii) $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$.

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

40. En el conjunto $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definida mediante la regla $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1)}$, esto es,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & n \le x < n+1; \\ 0, & x < n \ \vee \ x \ge n+1. \end{cases}$$

Demostrar que f_n converge a la función $g = 0_{\mathbb{R}}$, pero

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu = 1.$$

Explicar por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, calcule la función

$$h(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

41. En el intervalo $(0, 1]$ con la medida de Lebesgue se considera la sucesión de funciones $f_n \colon (0, 1] \to [0, +\infty)$ definida mediante la regla $f_n = n\mathbb{1}_{(0,1/n]}$, esto es,

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x \le \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases}$$

Demuestre que f_n converge a la función $g = 0$ pero

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = 1.$$

Explique por qué no se puede aplicar el teorema de convergencia dominada. Para ello, calcule la función

$$h(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

42. Criterio de la convergencia en medida (en el caso de medida finita). Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f_n \xrightarrow{\mu} g$;

(b) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_X \frac{|f_n - g|}{|f_n - g| + 1} \, d\mu = 0.$

43. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida infinita. Definimos las funciones $f_n, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ de la siguiente manera:

$$f_n = \frac{1}{n}, \qquad g = 0.$$

Demuestre que en este ejemplo $f_n \xrightarrow{\mu} g$, pero $\displaystyle\int_X \frac{|f_n - g|}{|f_n - g| + 1} \, d\mu \not\to 0.$

Continuidad de la integral con respecto al conjunto de integración

44. Lema. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, [0, +\infty])$. Definamos los conjuntos U_n $(n \in \{0, 1, 2, \ldots\})$:

$$U_n \coloneqq \big\{x \in X \colon \; f(x) \geq n\big\}.$$

Demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \mu(U_n) = 0.$$

45. Lema. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, [0, +\infty])$. Definamos los conjuntos U_n $(n \in \{0, 1, 2, \ldots\})$:

$$U_n \coloneqq \big\{x \in X \colon \; f(x) \geq n\big\}.$$

Demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{U_n} f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Sugerencia: usar la desigualdad de Márkov del Problema 11.

46. Continuidad de la integral respecto al conjunto de integración, primera versión. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, [0, +\infty])$. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $E \in \mathcal{F}$ y $\mu(E) < \delta$, entonces $\displaystyle\int_E f \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

Sugerencia: usar el lema anterior.

47. Continuidad de la integral respecto al conjunto de integración, segunda versión. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$. Dotamos $\mathcal{F}$ de la pseudométrica

$$\rho(A, B) \coloneqq \mu(A \bigtriangleup B).$$

Ya sabemos que $(\mathcal{F}, \rho)$ es un espacio pseudométrico. Definimos $J\colon \mathcal{F} \to \mathbb{C}$,

$$J(A) \coloneqq \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostrar que la función J es uniformemente continua.

Integrales impropias

48. Sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $f \in \mathcal{L}^1([a, +\infty), \mu, \mathbb{C})$. Demostrar que para toda sucesión $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ que tiende a $+\infty$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[a, b_n]} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{[a, +\infty)} f \, \mathrm{d}\mu.$$

49. Sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $f \in \mathcal{L}^1([a, +\infty), \mu, \mathbb{C})$. Demostrar que

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{[a, b]} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{[a, +\infty)} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Sugerencia: utilizar el resultado del problema anterior y el criterio del límite en términos de sucesiones (el criterio de Heine).

50. Consideremos la función $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}.$$

Demostrar que

$$\int_1^{+\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x = +\infty,$$

pero existe y es finito el límite

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Integración y conjuntos de medida cero

En los siguientes problemas se supone que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un conjunto de medida. La medida puede ser finita o infinita.

51. Igualdad casi en todas partes es una relación de equivalencia. Consideremos el conjunto de funciones complejas $\mathcal{F}$-medibles con la relación binaria $\overset{\mu}{\sim}$ definida mediante la siguiente regla:

$$f \overset{\mu}{\sim} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu\big(\{x \in X\colon f(x) \neq g(x)\}\big) = 0.$$

52. Sucesión de conjuntos cuyas medidas forman una serie convergente. Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos $\mathcal{F}$-medibles tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty,$$

y sea

$$A = \big\{x \in X\colon \ \{n \in \mathbb{N}\colon x \in E_n\} \text{ es infinito}\big\}.$$

Demuestre que $\mu(A) = 0$.

53. La integral de una función real no nula puede ser cero. Encuentre un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y una función $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ tal que

$$\mu(\{x \in X\colon \ f(x) \neq 0\}) > 0, \qquad \int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

54. Función real tal que su integral son cero para cualquier conjunto de integración. Sea $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ tal que para cada A en $\mathcal{F}$

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Demuestre que f es cero μ-c.t.p.

55. Función compleja tal que su integral es igual a la integral de su valor absoluto. Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ tal que

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

Demostrar que $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} |f|$.

56. Función compleja tal que el valos absoluto de su integral es igual a la integral del valor absoluto. Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ tal que

$$\left| \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right| = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

Encontrar α en $\mathbb{C}$ tal que $\alpha f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} |f|$.

La convergencia de integrales y otros modos de la convergencia

57. ¿La convergencia en medida implica la convergencia de integrales? Consideramos la recta real $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue μ. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mu,[0,+\infty))$ que converge en medida a la función constante cero $0_{\mathbb{R}}$:

$$f_n \xrightarrow{\mu} 0_{\mathbb{R}}.$$

Determinar si podemos hacer la siguiente conclusión:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

En caso de una respuesta positiva, hay que dar una demostración. En caso de una respuesta negativa, hay que construir un contraejemplo y justificarlo.

58. ¿La convergencia de las integrales implica la convergencia en medida? Consideramos la recta real $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue μ. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mu,[0,+\infty))$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Determinar si podemos hacer la siguiente conclusión:

$$f_n \xrightarrow{\mu} 0_{\mathbb{R}},$$

donde $0_{\mathbb{R}}$ es la función constante cero. En caso de una respuesta positiva, hay que dar una demostración. En caso de una respuesta negativa, hay que construir un contraejemplo y justificarlo. Sugerencia: puede ser útil la desigualdad de Márkov.

59. ¿La convergencia uniforme implica la convergencia de integrales, en el caso de medida finita? Consideramos el segmento $[0,1]$ con la medida restringida de Lebesgue μ. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{L}^1([0,1],\mu,[0,+\infty))$ que converge de manera uniforme a la función constante cero $0_{[0,1]}$:

$$f_n \overset{[0,1]}{\Longrightarrow} g.$$

Determinar si podemos hacer la siguiente conclusión:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

En caso de una respuesta positiva, hay que dar una demostración. En caso de una respuesta negativa, hay que construir un contraejemplo y justificarlo.

60. ¿La convergencia uniforme implica la convergencia de integrales, en el caso de medida infinita? Consideramos la recta real $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue μ. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mu,[0,+\infty))$ que converge de manera uniforme a la función constante cero $0_{\mathbb{R}}$:

$$f_n \overset{\mathbb{R}}{\Longrightarrow} g.$$

Determinar si podemos hacer la siguiente conclusión:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

En caso de una respuesta positiva, hay que dar una demostración. En caso de una respuesta negativa, hay que construir un contraejemplo y justificarlo.