Funciones definidas por integrales

Problemas para examen

Empezamos con un repaso de temas auxiliares.

Criterio de existencia de límites de funciones en términos de sucesiones (criterio de Heine)

1 Definición (el conjunto de las vecindades abiertas de un punto)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $a \in X$.

$$\tau(a) \coloneqq \Big\{ V \in \tau\colon\ a \in V \Big\}.$$

2 Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $a \in X$. Se dice que τ tiene una base local numerable en a, si existe una sucesión $(W_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \tau(a)^{\mathbb{N}}$ tal que para cada V en $\tau(a)$, existe k en $\mathbb{N}$ tal que $W_k \subseteq V$.

3 Problema. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $a \in X$. Supongamos que τ tiene una base local numerable en el punto a. Demostrar que existe una sucesión decreciente $(U_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \tau(a)^{\mathbb{N}}$ tal que para cada V en $\tau(a)$, existe k en $\mathbb{N}$ tal que $U_k \subseteq V$.

4 Problema (criterio de Heine para el límite, en términos de sucesiones)**.** Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos, $D \subseteq X$, $a \in X$, $b \in Y$, $f\colon D \to Y$. Supongamos que $a \in \operatorname{cl}(D \setminus \{a\})$ y τ_X tiene una base local numerable en el punto a. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$;

(b) para cada sucesión $t = (t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $D \setminus \{a\}$, si $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = a$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_k) = b$.

Sugerencias para demostrar que (b) implica (a):

(1) usar una base local numerable decreciente;

(2) suponer que no se cumple (b) y mostrar que no se cumple (a).

5 Problema. Sean (X, τ) un espacio topológico, $a \in X$, $(s_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tales que $s \to a$, $t \to a$. Construimos $u\colon \mathbb{N} \to X$,

$$u_k \coloneqq \begin{cases} s_j, & k = 2j-1,\ j \in \mathbb{N}; \\ t_j, & k = 2j,\ j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Demuestre que $u \to a$.

6 Problema (criterio de Heine para la existencia de un límite de una función en un punto, en términos de sucesiones)**.** Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos, $D \subseteq X$, $a \in X$, $f\colon D \to Y$. Supongamos que Y es de Hausdorff, $a \in \operatorname{cl}(D \setminus \{a\})$ y τ_X tiene una base local numerable en el punto a. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) existe b en Y tal que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$;

(b) para cada sucesión $t = (t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $D \setminus \{a\}$, si $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = a$, entonces existe c en Y tal que $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_k) = c$.

Criterio de Cauchy para la existencia del límite de una función

7 Problema. Sea (X, τ_X) un espacio topológico y sea (Y, d_Y) un espacio métrico completo. Además, sean $D \subseteq X$, $a \in X$, $f\colon D \to Y$. Supongamos que $a \in \operatorname{cl}(D \setminus \{a\})$ y τ_X tiene una base local numerable en el punto a. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) existe b en Y tal que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$;

(b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V \in \tau_X(a) \quad \forall u, v \in V \quad d_Y(f(u), f(v)) < \varepsilon.$

Integrales dependientes de un parámetro. Continuidad de la función definida por una integral

El propósito principal de esta unidad del curso es estudiar propiedades de funciones definidas por medio de integrales con parámetros:

$$\Phi(\lambda) := \int_X f(x, \lambda)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

8 Problema. Continuidad de la función Gamma Definimos la función Γ de Euler por medio de la integral de Euler del primer tipo:

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \qquad (0 < x < +\infty).$$

Demostrar que la función Γ es continua en su dominio $(0, +\infty)$.

9 Problema. Fórmula recursiva para la función Gamma Demostrar que

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \qquad (0 < x < +\infty).$$

10 Problema. Relación de la función Gamma con los factoriales Demostrar que para cada n en $\mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

11 Problema.

12 Problema. Continuidad de la integral de Dirichlet con la función exponencial Demostrar que la integral impropia

$$\int_0^{\to+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, \mathrm{d}x$$

converge uniformemente en $[0, +\infty)$, y la función

$$\Phi(\lambda) := \int_0^{\to+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, \mathrm{d}x$$

es continua en $[0, +\infty)$.

13 Problema. Cálculo de la integral de Dirichlet a través de la derivación respecto al parámetro Demostrar que para todo $\lambda \geq 0$

$$\boxed{\int_0^{\to+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \lambda.}$$

Indicación. Considerar la función

$$\Phi(\lambda) := \int_0^{\to+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, \mathrm{d}x,$$

calcular su derivada, luego calcular $\Phi(\lambda)$.

14 Problema. Integrales de Fresnel Demostrar las fórmulas:

$$\boxed{\int_0^{\to+\infty} \cos x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},} \qquad \boxed{\int_0^{\to+\infty} \operatorname{sen} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.}$$

Indicación. Hacer el cambio de variable $t = x^2$, aplicar la fórmula

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \, \mathrm{d}u,$$

invertir el orden de las integraciones.

15 Problema. Fórmula de los complementos para la función Γ Demostrar que para todo $x \in (0,1)$

$$\boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}.}$$

Indicación. Demostrar al principio que

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{1+y}\,\mathrm{d}y.$$

Para $x \in (0,1)$ fijo, considerar la función

$$f_x(\lambda) \coloneqq \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{e^{i\lambda}\,y+1}\,\mathrm{d}y \qquad (\lambda \in (-\pi,\pi)).$$

Demostrar que $f_x'(\lambda) = -ixf_x(\lambda)$. De aquí $f_x(\lambda) = g(x)e^{-i\lambda x}$, donde $\gamma(x)$ depende solamente de x. Mostrar que para $\lambda \in (0,\pi)$

$$g(x)\operatorname{sen}(\lambda x) = \frac{f(-\lambda)-f(\lambda)}{2i} = \operatorname{sen}\lambda \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^x\,dy}{y^2+2y\cos\lambda+1} = \int\limits_{\cot\lambda}^{+\infty} \frac{(u\operatorname{sen}\lambda-\cos\lambda)^x}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Pasando al límite para $\lambda \to \pi$, probar que $g(x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}$. Escribir la fórmula explícita para $f_x(\lambda)$, luego sustituir $\lambda = 0$.

16 Problema. Continuidad y derivadas parciales del potencial volúmico Sea K un compacto en $\mathbb{R}^3$, $\rho\colon K \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Mostrar que la función

$$U(a) \coloneqq \int\limits_K \frac{\rho(x)\,\mathrm{d}x}{|x-a|}$$

es continua en $\mathbb{R}^3 \setminus K$ y calcular sus derivadas parciales.

Indicación. Escribir U en forma

$$U(a) = V_r(a) + W_r(a) \quad \text{con} \quad V_r(a) = \int\limits_{|x-a|\le r} \frac{\rho(x)\,dx}{|x-a|}, \quad W_r(a) = \int\limits_{|x-a|>r} \frac{\rho(x)\,dx}{|x-a|}.$$

Obtener una mayoración $|V_r(a)| < kr^2$ con k constante y probar de allí que $W_{1/\nu}(a) \overset{a\in\mathbb{R}^3\Rightarrow}{U}$ (a) cuando $\nu \to \infty$.

Para demostrar que $\partial_1 U(a) = U_1(a) \coloneqq \int_K \rho(x)\frac{x_1-a_1}{|x-a|^3}\,\mathrm{d}x$, probar la fórmula

$$\int\limits_{b_1}^{c_1} U_1(a_1,a_2,a_3)\,da_1 = U(c_1,a_2,a_3) - U(b_1,a_2,a_3).$$

17 Problema. Regla de Leibniz con límites variables Sean I y J intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ una función continua. Se supone que para todo $(x, y) \in I \times J$ existe la derivada parcial $\partial_2 f(x, y)$ y que existe $g \in \mathcal{L}^1(I)$ tal que $|\partial_2 f(x, y)| \le g(x)$ para todo $(x, y) \in I \times J$. Sean φ y ψ funciones derivables $J \to I$. Se define para todo $y \in J$:

$$\Phi(y) \coloneqq \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Probar que Φ es derivable y

$$\boxed{\Phi'(y) = \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \partial_2 f(x, y)\,\mathrm{d}x + \varphi'(y) f(\varphi(y), y) - \psi'(y) f(\psi(y), y).}$$

Indicación. Para un y fijo en J, escribir $\Phi(y + h)$ en forma

$$\Phi(y+h) = \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x + \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+h)} f(x, y)\,\mathrm{d}x - \int_{\psi(y)}^{\psi(y+h)} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

18 Problema. Cálculo de la integral de Poisson Demostrar que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.}$$

Indicación. Considerar las funciones

$$I(L) \coloneqq \int_{-L}^{L} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad g(R) \coloneqq \int_{x^2+y^2 \le R^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

calcular $g(R)$ usando coordenadas polares, y mostrar que $g(L) \le I(L)^2 \le g(L\sqrt{2})$.

19 Problema. Cálculo de la integral de Poisson con otro método Para todo x en $\mathbb{R}$ se definen

$$f(x) \coloneqq \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt \right)^2, \qquad g(x) \coloneqq \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Demuestre que para cada x en $\mathbb{R}$ se cumple la igualdad $f'(x) + g'(x) = 0$ y deduzca que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$. Utilice este resultado para calcular la integral de Poisson:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

20 Problema. Para cada $a > 0$, calcular la siguiente integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax)\,\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}.$$