Derivación e integración

Problemas para examen

La lista de problemas todavía no es completa.

Índice

1. Límites de funciones monótonas

En este curso aceptamos como un hecho la existencia del supremo e ínfimo de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$.

1 Ejercicio (sobre los límites de una función creciente en los extremos de un intervalo)**.** Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$, y sea $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una función creciente. Denotemos por V la imagen de la función f:

$$V \coloneqq f[(a, b)] = \{y \in \mathbb{R}\colon \quad \exists x \in (a, b) \quad f(x) = y\}.$$

Demostrar que

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in (a,b)}} f(x) = \sup(V), \tag{1}$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = \inf(V). \tag{2}$$

Considerar varios casos: $a = -\infty$, $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$, $b \in \mathbb{R}$, $\sup(V) \in \mathbb{R}$, $\sup(V) = +\infty$, $\inf(V) \in \mathbb{R}$, $\inf(V) = -\infty$.

2 Ejercicio (sobre los límites de una función decreciente en los extremos de un intervalo)**.** Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$, y sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una función decreciente. Denotemos por V la imagen de la función f:

$$V := f[(a,b)] = \{y \in \mathbb{R}\colon \quad \exists x \in (a,b) \quad f(x) = y\}.$$

Demostrar que

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in (a,b)}} f(x) = \inf(V), \tag{3}$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = \sup(V). \tag{4}$$

Considerar varios casos: $a = -\infty$, $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$, $b \in \mathbb{R}$, $\sup(V) \in \mathbb{R}$, $\sup(V) = +\infty$, $\inf(V) \in \mathbb{R}$, $\inf(V) = -\infty$.

3 Ejercicio (el límite de la parte entera en el infinito)**.** Demostrar que

$$\lim_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty.$$

Sugerencia: sabemos que $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$ para cada x en $\mathbb{R}$.

4 Ejercicio. Calcular

$$\sup_{x > -1} \frac{x}{x+1}.$$

2. Estructura de discontinuidades de funciones crecientes

5 Ejercicio (los límites laterales de una función creciente en un punto)**.** Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $x \in \operatorname{int}(A)$. Demostrar que existen

$$\lim_{t \to x^+} f(t), \qquad \lim_{t \to x^-} f(t).$$

Estos límites se denotan por $f(x^+)$ y $f(x^-)$. Demostrar que

$$f(x^-) \le f(x) \le f(x^+).$$

6 Ejercicio (repaso: el criterio de límite en términos de límites laterales)**.** Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función, $x \in \operatorname{int}(A)$, $v \in \overline{\mathbb{R}}$. Demostrar que

$$\lim_{t \to x} f(t) = v \qquad \Big(\lim_{t \to x^-} f(t) = v \qquad \wedge \qquad \lim_{t \to x^+} f(t) = v\Big).$$

Sugerencia: usar la definición del límite.

7 Ejercicio (el criterio de continuidad de una función creciente en un punto)**.** Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $x \in \operatorname{int}(A)$. Mostrar que f es continua en x si, y solo si,

$$f(x^-) = f(x^+).$$

8 Ejercicio (el comportamiento de una función creciente en un extremo del dominio)**.** Explicar cómo modificar las afirmaciones de los ejercicios anteriores, si x es un punto extremo del intervalo A.

9 Ejercicio (las discontinuidades de una función creciente en los puntos interiores del intervalo son saltos)**.** Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $x \in \operatorname{int}(A)$. Mostrar que si f no es continua en x, entonces x es un salto de f, es decir, $f(x^-) < f(x^+)$.

10 Ejercicio (comparación de los límites laterales de una función creciente en dos puntos diferentes)**.** Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $x, y \in A$, $x < y$. Demuestre que

$$f(x^+) \le f(y^-).$$

Sugerencia: construir un punto z en (x, y) y demostrar que

$$f(x^+) \le f(z) \le f(y^-).$$

11 Ejercicio (sobre una suma finita de las alturas de saltos de una función creciente)**.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente, $m \in \mathbb{N}$,

$$a < x_1 < \ldots < x_m < b.$$

Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{m} (f(x_k^+) - f(x_k^-)) \le f(b) - f(a).$$

12 Ejercicio (una cota superior para el número de los saltos grandes de una función creciente)**.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente, $h > 0$. Pongamos

$$S_h \coloneqq \{x \in (a, b)\colon\ f(x^+) - f(x^-) \ge h\}.$$

Demostrar que el conjunto S_h es finito y

$$\#(S_h) \le \frac{f(b) - f(a)}{h}.$$

Sugerencia: en el principio de la demostración, todavía no sabemos que el conjunto S_h es finito, y no podemos numerar todos los elementos de S_h. Se recomienda suponer que $x_1, \ldots, x_m$ son algunos elementos de S_h, diferentes a pares, y obtener una cota superior para m.

13 Ejercicio (el conjunto de las discontinuidades de una función creciente en un intervalo acotado es finito o numerable)**.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Pongamos

$$T \coloneqq \{x \in (a, b)\colon\ f(x^+) - f(x^-) > 0\}.$$

Demostrar que el conjunto T es finito o numerable.

14 Ejercicio (el conjunto de las discontinuidades de una función creciente en un intervalo arbitrario es finito o numerable)**.** Sea A un intervalo en $\mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente. Demostrar que el conjunto

$$T \coloneqq \{x \in \operatorname{int}(A)\colon\ f(x^+) - f(x^-) > 0\}$$

es finito o numerable. Sugerencia: representar A como una unión numerable de intervalos acotados.

15 Ejercicio. Modificar los ejercicios anteriores para funciones decrecientes.

3. Derivadas de Dini

16 Ejercicio (derivadas de Dini)**.** Escribir las definiciones de las derivadas laterales superiores e inferiores de una función real:

$$(D^+ f)(x) \coloneqq \limsup_{t \to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \qquad (D_+ f)(x) =?, \quad (D^- f)(x) =?, \quad (D_- f)(x) =?.$$

17 Ejercicio (relaciones simples entre las derivadas de Dini)**.** Explicar por qué se cumplen las siguientes desigualdades:

$$(D_+ f)(x) \le (D^+ f)(x), \qquad (D_- f)(x) \le (D^- f)(x).$$

18 Ejercicio. ¿Cuándo todas las cuatro derivadas de Dini son iguales entre si?

19 Ejercicio (criterio de derivabilidad en un punto, en términos de las derivadas de Dini)**.** Sean $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \in (a, b)$. Supongamos que

$$(D^+ f)(x) \le (D_- f)(x), \qquad (D_+ f)(x) \ge (D^- f)(x).$$

Mostrar que f tiene una derivada en x.

20 Ejercicio. Sean $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \in [a, b)$ y $v \in \mathbb{R}$ tal que $v < (D^+ f)(x)$. Muestre que para cada $\delta > 0$ existe h en $(0, \delta)$ tal que $x + h \in [a, b]$ y

$$f(x + h) - f(x) > vh.$$

21 Ejercicio. Sean $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \in (a, b]$ y $u \in \mathbb{R}$ tal que $u > (D_- f)(x)$. Muestre que para cada $\delta > 0$ existe h en $(0, \delta)$ tal que $x - h \in [a, b]$ y

$$f(x) - f(x - h) < uh.$$

4. El lema de Vitali

22 Ejercicio (cubiertas de Vitali)**.** Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$ y sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$. ¿Cuándo se dice que $\mathcal{A}$ es una *cubierta de Vitali* de E?

23 Ejercicio. Sean E un subconjunto de $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ una cubierta de Vitali de E, F un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ y $x \in E \setminus F$. Demostrar que existe A en $\mathcal{A}$ tal que $x \in A$ y $A \cap F = \varnothing$.

24 Ejercicio (el lema de Vitali: reducción al caso de conjuntos cerrados)**.** Demostrar el lema de Vitali suponiendo que este lema ya está demostrado para el caso cuando cada elemento de $\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado.

25 Ejercicio (aproximación de la medida superior por arriba, usando conjuntos abiertos)**.** Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $\mu^*(E) < +\infty$. Mostrar que existe un conjunto abierto U en $\mathbb{R}$ tal que $E \subseteq U$ y $\mu(U) < +\infty$.

26 Ejercicio (el lema de Vitali: reducción al caso de conjuntos contenidos en un conjunto abierto)**.** Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $\mu^*(E) < +\infty$ y sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ tal que $E \subseteq U$ y $\mu(U) < +\infty$. Sea $\mathcal{A}$ es una cubierta de Vitali de E. Pongamos

$$\mathcal{B} \coloneqq \{A \in \mathcal{A} \colon\ A \subseteq U\}.$$

Demostrar que $\mathcal{B}$ es una cubierta de Vitali de E.

27 Ejercicio (el lema de Vitali)**.** Enunciar y demostrar el lema de Vitali. Usando los resultados de los ejercicios anteriores, se puede suponer que todos los elementos de la cubierta son intervalos cerrados y que todos los elementos de la cubierta están contenidos en un conjunto abierto de medida finita.

5. La derivada de una función monótona

28 Teorema (sobre la derivada de una función creciente)**.** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Demostrar que f tiene derivada en casi todo punto de $[a,b]$.

29 Ejercicio (una cota superior para la integral de la derivada de una función creciente)**.** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Demostrar que f' es medible y

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \le f(b) - f(a).$$

Se recomienda usar el Teorema 28.

6. Funciones de variación acotada

En este tema suponemos que $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

30 Ejercicio (particiones de un intervalo)**.** Denotamos por $\mathcal{P}(a,b)$ el conjunto de las *particiones* de $[a,b]$ en el mismo sentido que se usa en la teoría de la integral de Riemann. En otras palabras, $\tau \in \mathcal{P}(a,b)$ si, y solo si, τ es una tupla de puntos, $\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n)$, tal que

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b.$$

Revisar los siguientes ejemplos de particiones.

- $\tau = (a, b)$.
- $\tau = (a, c, b)$, donde $a < c < b$.
- $\tau = (\tau_0, \ldots, \tau_n)$, donde

$$\tau_k = a + \frac{b-a}{n}\,k \qquad (k \in \{0, \ldots, n\}).$$

En vez de tuplas ordenadas, se pueden considerar conjuntos finitos. ¿Cómo construir una tupla ordenada a partir de un subconjunto finito de $[a,b]$?

31 Ejercicio (la suma de los incrementos de una función en una partición)**.** Sea $\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathcal{P}(a,b)$ y sea $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} \big(f(\tau_k) - f(\tau_{k-1}) \big) = f(b) - f(a).$$

32 Ejercicio (la suma absoluta de los incrementos de una función en una partición)**.** Sea $\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathcal{P}(a,b)$ y sea $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Pongamos

$$S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \big| f(\tau_k) - f(\tau_{k-1}) \big|.$$

Demostrar que

$$|f(b) - f(a)| \le S_{\mathrm{abs}}(f,\tau).$$

33 Ejercicio (la parte positiva y la parte negativa de números reales, repaso)**.** Recordar las definiciones de las funciones P y N. Demostrar que para cada x en $\mathbb{R}$,

$$x = P(x) - N(x), \qquad |x| = P(x) + N(x),$$

$$P(x) = \frac{|x| + x}{2}, \qquad N(x) = \frac{|x| - x}{2}.$$

34 Ejercicio (la propiedad subaditiva de la parte positiva y de la parte negativa de números reales, repaso)**.** Demostrar que para cualesquier x, y en $\mathbb{R}$,

$$P(x+y) \le P(x) + P(y), \qquad N(x+y) \le N(x) + N(y).$$

35 Ejercicio (las sumas de los incrementos positivos y negativos de una función en una partición)**.** Sea $\tau \in \mathcal{P}(a,b)$ y sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Recordar la definición de $S_+(f,\tau)$ y $S_-(f,\tau)$.

36 Ejercicio (la variación total, la variación positiva y la variación negativa de una función en un segmento)**.** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Pongamos

$$\operatorname{Var}_a^b(f) \coloneqq \sup_{\tau \in \mathcal{P}(a,b)} S_{\mathrm{abs}}(f,\tau).$$

Escribir las definiciones de $\operatorname{PVar}_a^b(f)$ y $\operatorname{NVar}_a^b(f)$.

37 Ejercicio (las diferencias absolutas de los valores de una función en los extremos de un intervalo se acotan por la variación total)**.** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Demostrar que

$$|f(b) - f(a)| \le \operatorname{Var}_a^b(f).$$

Sugerencia: considerar la partición trivial $\tau = (a,b)$. Mostrar que

$$|f(b) - f(a)| = S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) \le \operatorname{Var}_a^b(f).$$

38 Ejercicio (las diferencias absolutas de los valores de una función en un intervalo se acotan por la variación total)**.** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y sean $x, y \in [a,b]$. Demostrar que

$$|f(y) - f(x)| \le \operatorname{Var}_a^b(f).$$

Sugerencia: construir una partición τ de $[a,b]$ que incluya los puntos x, y. Mostrar que

$$|f(y) - f(x)| \le S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) \le \operatorname{Var}_a^b(f).$$

39 Ejercicio (la parte positiva de la diferencia de los valores de una función en los extremos de un intervalo se acota por la variación positiva)**.** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Demostrar que

$$P(f(b) - f(a)) \le \operatorname{PVar}_a^b(f).$$

Sugerencia: considerar la partición trivial $\tau = (a,b)$. Mostrar que

$$P(f(b) - f(a)) = S_+(f,\tau) \le \operatorname{PVar}_a^b(f).$$

40 Ejercicio (la parte negativa de la diferencia de los valores de una función en los extremos de un intervalo se acota por la variación negativa)**.** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Demostrar que

$$N(f(b) - f(a)) \le \operatorname{NVar}_a^b(f).$$

Sugerencia: considerar la partición trivial $\tau = (a,b)$. Mostrar que

$$N(f(b) - f(a)) = S_-(f,\tau) \le \operatorname{NVar}_a^b(f).$$

41 Ejercicio (la variación total, la variación positiva y la variación negativa de una función creciente)**.** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ creciente. Calcular $\operatorname{Var}_a^b(f)$, $\operatorname{PVar}_a^b(f)$, $\operatorname{NVar}_a^b(f)$.

42 Ejercicio (la variación total, la variación positiva y la variación negativa de una función decreciente)**.** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ decreciente. Calcular $\operatorname{Var}_a^b(f)$, $\operatorname{PVar}_a^b(f)$, $\operatorname{NVar}_a^b(f)$.

43 Ejercicio (relación entre S_{abs}, S_+ y S_-)**.** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $\tau \in \mathcal{P}(a,b)$. Demostrar que

$$S_+(f,\tau) = S_-(f,\tau) + f(b) - f(a),$$
$$S_{\text{abs}}(f,\tau) = S_+(f,\tau) + S_-(f,\tau).$$

44 Ejercicio (relación entre Var, PVar, NVar)**.** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Demostrar que

$$\operatorname{PVar}_a^b(f) = \operatorname{NVar}_a^b(f) + f(b) - f(a),$$

$$\operatorname{Var}_a^b(f) = \operatorname{PVar}_a^b(f) + \operatorname{NVar}_a^b(f).$$

45 Ejercicio (la suma de las diferencias absolutas se aumenta al agregar un punto a la partición)**.** Sea $\tau = (\tau_0, \ldots, \tau_n)$ una partición de $[a,b]$ y sea τ' una partición de $[a,b]$ que se obtiene de τ al agregar un punto c:

$$\tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m < c < \tau_{m+1} < \ldots < \tau_n.$$

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Demostrar que

$$S_{\text{abs}}(f,\tau) \le S_{\text{abs}}(f,\tau').$$

Demostrar propiedades similares para S_+ y S_-.

46 Ejercicio (la variación total de una función en un intervalo dividido en varias partes)**.** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $c \in (a,b)$. Demostrar que

$$\operatorname{Var}_a^b(f) = \operatorname{Var}_a^c(f) + \operatorname{Var}_c^b(f).$$

47 Ejercicio (la variación positiva y negativa de una función en un intervalo dividido en varias partes)**.** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $c \in (a,b)$. Demostrar que

$$\operatorname{PVar}_a^b(f) = \operatorname{PVar}_a^c(f) + \operatorname{PVar}_c^b(f), \qquad \operatorname{NVar}_a^b(f) = \operatorname{NVar}_a^c(f) + \operatorname{NVar}_c^b(f).$$

48 Ejercicio (funciones de variación acotada)**.** Escribir la definición de $\operatorname{BV}([a,b],\mathbb{R})$.

49 Ejercicio (sobre la variación total, variación positiva y la variación negativa, con el límite superior variable)**.** Sea $f \in \operatorname{BV}([a,b],\mathbb{R})$. Definimos $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$u(x) \coloneqq \operatorname{Var}_a^x(f), \qquad v(x) \coloneqq \operatorname{PVar}_a^x(f), \qquad w(x) \coloneqq \operatorname{NVar}_a^x(f).$$

Mostrar que las funciones u, v, w son crecientes.

50 Teorema (cada función real de variación acotada es una diferencia de dos funciones crecientes)**.** Sea $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R})$. Construir funciones crecientes $g, h \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $f = g - h$. Dos métodos:

- usando $\mathrm{Var}_a^x(f)$,
- usando $\mathrm{PVar}_a^x(f)$ y $\mathrm{NVar}_a^x(f)$.

51 Ejercicio (sobre la derivada de la variación total con límite superior variable)**.** Sea $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R})$. Definimos $u \colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$u(x) \coloneqq \mathrm{Var}_a^x(f).$$

Demostrar que si $x \in (a,b)$ y las funciones f y u son derivables en x, entonces

$$|f'(x)| \le u'(x). \tag{5}$$

52 Ejercicio (sobre la integral del valor absoluto de la derivada de una función de variación acotada)**.** Sea $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R})$. Demostrar que f es derivable c.t.p., $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$, y

$$\int\limits_a^b |f'| \, \mathrm{d}\mu \le \mathrm{Var}_a^b(f).$$

Se recomienda usar los resultados de los Ejercicios 51 y 29.

53 Ejercicio (sobre las derivadas de la variación positiva y negativa con límite superior variable)**.** Sea $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R})$. Definimos $v \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $w \colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$v(x) \coloneqq \mathrm{PVar}_a^x(f), \qquad w(x) \coloneqq \mathrm{NVar}_a^x(f).$$

Demostrar que si $x \in (a,b)$ y las funciones f y v son derivables en x, entonces

$$P(f'(x)) \le v'(x).$$

Demostrar un resultado similar para la variación negativa:

$$N(f'(x)) \le w'(x).$$

54 Ejercicio (sobre la integral de la parte positiva de la derivada de una función de variación acotada)**.** Sea $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R})$. Demostrar que f es derivable c.t.p., $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$, $P \circ f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$, y

$$\int\limits_a^b P(f'(x)) \, \mathrm{d}x \le \mathrm{PVar}_a^b(f).$$

Un camino posible es usar los resultados de los Ejercicios 53 y 29.

55 Ejercicio (sobre la integral de la parte negativa de la derivada de una función de variación acotada)**.** Sea $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{R})$. Demostrar que f es derivable c.t.p., $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$, $N \circ f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$, y

$$\int\limits_a^b N(f'(x)) \, \mathrm{d}x \le \mathrm{NVar}_a^b(f).$$

7. Funciones complejas de variación acotada

56 Ejercicio (funciones complejas de variación acotada)**.** Explicar cuáles de las afirmaciones anteriores se generalizan a funciones complejas de variación acotada. Demostrar que si $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$, entonces f es una combinación lineal de cuatro funciones crecientes.

57 Ejercicio (las funciones de variación acotada son acotadas)**.** Demostrar que si $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$, entonces f es acotada.

58 Ejercicio (las funciones de variación acotada forman un espacio normado)**.** Demostrar que Var_a^b tiene propiedades de seminorma. Demostrar que $\mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$ es un espacio vectorial. Demostrar que la función

$$\|f\|_{\mathrm{BV}} \coloneqq \|f\|_{\sup} + \mathrm{Var}_a^b(f)$$

es una norma en $\mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$.

59 Ejercicio. Algunos autores prefieren trabajar con otra norma en $\mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$, definida como

$$\|f\|_{\mathrm{BV},a} \coloneqq |f(a)| + \mathrm{Var}_a^b(f).$$

Demostrar que las normas $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}$ y $\|\cdot\|_{\mathrm{BV},a}$ son diferentes entre si, pero equivalentes. Más precisamente, demostrar que existe $C > 0$ tal que para cada f en $\mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$ se tiene

$$\|f\|_{\mathrm{BV},a} \le \|f\|_{\mathrm{BV}} \le C\,\|f\|_{\mathrm{BV},a}.$$

60 Ejercicio. Demostrar que el espacio $\mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$ es completo.

61 Ejercicio (sobre la derivada de la variación total con límite superior variable, el caso de funciones complejas)**.** Sea $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$u(x) \coloneqq \mathrm{Var}_a^x(f).$$

Demostrar que si $x \in (a,b)$ y las funciones f y u son derivables en x, entonces

$$|f'(x)| \le u'(x). \tag{6}$$

62 Ejercicio (sobre la integral del valor absoluto de la derivada de una función de variación acotada)**.** Sea $f \in \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$. Demostrar que f es derivable c.t.p., $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$, y

$$\int_a^b |f'|\,\mathrm{d}\mu \le \mathrm{Var}_a^b(f).$$

Se recomienda usar los resultados de los Ejercicios 61 y 29.

8. Funciones absolutamente continuas

63 Ejercicio. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. ¿Cuándo se dice que f es *absolutamente continua*? Escribir la definición. Denotamos por $\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$ al conjunto de todas las funciones de esta clase. Para las funciones absolutamente continuas con valores reales usamos la notación $\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{R})$.

64 Ejercicio (cada función Lipschitz continua es absolutamente continua)**.** Demostrar que
$$\mathrm{Lip}([a,b],\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C}).$$

65 Ejercicio (cada función absolutamente continua es continua)**.** Demostrar que
$$\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C}) \subseteq C([a,b],\mathbb{C}).$$

66 Ejercicio (teorema: cada función absolutamente continua es de variación acotada)**.** Demostrar que
$$\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C}).$$

67 Ejercicio (las funciones absolutamente continuas son acotadas)**.** Demostrar que si $f \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$, entonces f es acotada.

68 Ejercicio (sobre el producto de dos funciones absolutamente continuas)**.** Demostrar que si $f, g \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$, entonces $fg \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$.

69 Ejercicio. Mostrar que $\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo.

70 Ejercicio. Mostrar que $\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$ es un álgebra compleja. Mostrar que esta álgebra tiene un elemento neutro multiplicativo.

71 Ejercicio (cada función absolutamente continua es derivable casi en todos puntos, y su derivada es integrable)**.** Sea $f \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$. Mostrar que f es derivable c.t.p. y que $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$.

9. El primer teorema fundamental de cálculo

En los problemas de esta sección definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mediante
$$F(x) \coloneqq \int_a^x f \, \mathrm{d}\mu. \tag{7}$$

72 Ejercicio (las integrales con límite superior variable son funciones absolutamente continuas)**.** Sea $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ por la fórmula (7). Demostrar que $F \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$.

73 Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ por la fórmula (7). Demostrar que F es de variación acotada, continua y derivable en c.t.p. Demostrar que F' es integrable.

74 Ejercicio (la correspondencia entre las funciones integrables y sus integrales con límite superior variables es casi inyectiva)**.** Sea $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ por la fórmula (7). Supongamos que $F(x) = 0$ para cada x en $[a,b]$. Demostrar que $f = 0$ c.t.p.

75 Ejercicio (el primer teorema fundamental de cálculo para las funciones continuas)**.** Sea $f \in C([a,b])$. Definimos F mediante (7). Demostrar que $F' = f$.

76 Ejercicio (el primer teorema fundamental de cálculo para las funciones esencialmente acotadas)**.** Sea $f \in \mathcal{L}^\infty([a,b])$. Definimos F mediante (7). Demostrar que $F' = f$ c.t.p.

77 Ejercicio (el primer teorema fundamental de cálculo para las funciones Lebesgue integrables)**.** Sea $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ como

$$F(x) \coloneqq \int_a^x f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostrar que $F' = f$ c.t.p.

10. El segundo teorema fundamental de cálculo

78 Proposición (la correspondencia entre las funciones absolutamente continuas y sus derivadas es inyectiva)**.** Sea $F \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$. Supongamos que $F' = 0$ c.t.p. Demostrar que F es una constante. Sugerencia: utilizar el lema de Vitali.

79 Teorema (el segundo teorema fundamental de cálculo para funciones absolutamente continuas)**.** Sea $F \in \mathrm{AC}([a,b])$. Demostrar que

$$\int_a^b F' \, \mathrm{d}\mu = F(b) - F(a).$$

Sugerencia: aplicar el Teorema 77 a la función $f \coloneqq F'$, luego usar la Proposición 78.

80 Ejercicio (criterio de una función absolutamente continua)**.** Sea $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Demostrar que las siguientes tres condiciones son equivalentes:

- $F \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$,
- $\forall x \in [a,b] \quad F(x) = F(a) + \displaystyle\int_a^x F' \, \mathrm{d}\mu$,

- existen f en $L^1([a,b],\mathbb{C})$ y c en $\mathbb{C}$ tales que

$$\forall x\in[a,b]\qquad F(x)=c+\int\limits_a^x f\,\mathrm{d}\mu.$$

81 Ejercicio (expresión de la variación acotada de una función absolutamente continua en términos de su derivada)**.** Sea $F\in\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$. Demostrar que

$$\mathrm{Var}_a^b(F)=\int\limits_a^b |F'|\,\mathrm{d}\mu.$$

Indicación: ya hemos demostrado una desigualdad entre los dos lados de esta fórmula, ver el resultado del Ejercicio 52.

82 Ejercicio (expresión de la variación positiva y negativa de una función absolutamente continua real en términos de su derivada)**.** Sea $F\in\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{R})$. Demostrar que

$$\mathrm{PVar}_a^b(F)=\int\limits_a^b P(F'(x))\,\mathrm{d}x,\qquad \mathrm{NVar}_a^b(F)=\int\limits_a^b N(F'(x))\,\mathrm{d}x.$$

Indicación: pueden ser útiles los resultados de los Ejercicios 54 y 55.

83 Ejercicio (las funciones absolutamente continuas forman un espacio normado)**.** Mostrar que el conjunto $\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$ con la norma

$$\|f\|_{\mathrm{AC}}\coloneqq\|f\|_{\sup}+\mathrm{Var}_a^b(f) \tag{8}$$

es un espacio normado. Por el resultado del Problema 69, ya sabemos que $\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo. Falta verificar que la función $\|\cdot\|_{\mathrm{AC}}$ es subaditiva, homogénea absoluta y si $\|f\|_{\mathrm{AC}}=0$, entonces f es la constante cero.

84 Ejercicio (otra forma equivalente para la norma de funciones absolutamente continuas)**.** Mostrar que si $f\in\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$, entonces

$$\|f\|_{\mathrm{AC}}=\|f\|_{\sup}+\int\limits_a^b |f'|\,\mathrm{d}\mu. \tag{9}$$

Usar el resultado del Problema 81.

85 Ejercicio (el isomorfismo isométrico entre el espacio de las funciones integrables y el espacio de las funciones absolutamente continuas que se anulan en el extremo izquierdo)**.** Sea

$$V\coloneqq\Big\{F\in\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})\colon\ F(a)=0\Big\}.$$

En el espacio V consideramos la norma

$$\|F\|_V \coloneqq \operatorname{Var}_a^b(F).$$

Definimos $J\colon L^1([a,b]) \to V$, $D\colon V \to L^1([a,b])$,

$$J(f) \coloneqq \int\limits_{[a,x]} f\,\mathrm{d}\mu, \qquad D(F) \coloneqq F'.$$

Explique por qué estas definiciones son consistentes. Muestre que J y D son isomorfismos isométricos mutualmente inversos.

86 Ejercicio (una receta constructiva para aproximar la variación total de una función, usando solamente las particiones uniformes)**.** Sea $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$. Para cada n en $\mathbb{N}$ y cada k en $\{0,\ldots,n\}$ pongamos

$$t_{n,k} \coloneqq a + \frac{b-a}{n}\,k.$$

Demostrar que

$$\operatorname{Var}_a^b(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \bigl|f(t_{n,k}) - f(t_{n,k-1})\bigr|.$$

Indicación. Un camino de solución es usar el resultado del Ejercicio 81. Denotemos por $\omega_{f'}$ el indicador de continuidad uniforme de f' (algunos autores prefieren decir "el módulo de continuidad uniforme" de f'):

$$\omega_{f'}(\delta) \coloneqq \sup\bigl\{|f'(x) - f'(y)|\colon\ x,y \in [a,b],\ |x-y| \le \delta\bigr\}.$$

Como f' es uniformemente continua, tenemos que $\omega_{f'}(\delta) \to 0$ cuando $\delta \to 0$. Usando el teorema del valor medio mostrar que $f'(u)$ se aproxima en términos de la diferencia $f(t_{n,k}) - f(t_{n,k-1})$, y el error se acota en términos de $\omega_{f'}((b-a)/n)$.

87 Ejercicio (las funciones absolutamente continuas forman un espacio de Banach)**.** Usando la definición de funciones absolutamente continuas demostrar que $\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$ es un subespacio cerrado del espacio $\mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$. Como $\mathrm{BV}([a,b],\mathbb{C})$ es completo, podemos concluir que $\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$ es completo.

88 Ejercicio (las funciones absolutamente continuas forman un espacio de Banach, otra solución)**.** Demostrar la completez de $\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$ de otra manera, usando la completez de $L^1([a,b])$ y las ideas del Ejercicio 85.

89 Ejercicio (criterio de función Lipschitz continua en términos de su derivada)**.** Sea $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $F \in \mathrm{Lip}([a,b])$.

(b) F es derivable c.t.p., $F' \in \mathcal{L}^\infty([a,b])$, y para cada x en $[a,b]$,

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'.$$

(c) existen g en $\mathcal{L}^\infty([a,b])$ y c en $\mathbb{C}$ tales que para cada x en $[a,b]$,

$$F(x) = c + \int_a^x g.$$

90 Ejercicio (un espacio de Sóbolev)**.** Consideremos el siguiente espacio de funciones:

$$H \coloneqq \Big\{ f \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})\colon\ f' \in \mathcal{L}^2([a,b]),\ f(a) = f(b) = 0 \Big\}.$$

Consideramos H con la norma

$$\|f\| \coloneqq N_2(f').$$

También consideremos el siguiente subespacio de $L^2([a,b])$:

$$H_1 \coloneqq \left\{ g \in L^2([a,b])\colon\ \int_a^b g = 0 \right\}.$$

Demuestre que H_1 es un subespacio cerrado de $L^2([a,b])$. Definimos $D\colon H \to H_1$,

$$Df \coloneqq f'.$$

Demuestre que D es un isomorfismo isométrico de espacios normados. Demuestre que H es un espacio de Hilbert.