Conjuntos convexos y funciones convexas

Problemas para examen

En esta unidad del curso se trata de propiedades elementales de conjuntos convexos y funciones convexas. Hay propiedades más complicadas que se estudian en libros especiales (por ejemplo, Rockafellar, “Convex analysis”).

Conjuntos convexos en un espacio vectorial real

En estos ejercicios suponemos que V es un espacio vectorial real o complejo.

1 Ejercicio (definición de conjunto convexo)**.** Sea $A \subseteq V$. Se dice que A es *convexo* si para cualesquiera a, b en A y cualquier λ en $[0, 1]$ se tiene

$$(1 - \lambda)a + \lambda b \in A.$$

2 Ejercicio (una variación de la definición de conjunto convexo)**.** Sea $A \subseteq V$. Mostrar que A es convexo si, y solo si, para cualesquiera a, b en A y cualesquiera $\xi, \eta \geq 0$ tales que $\xi + \eta = 1$, se tiene que

$$\xi a + \eta b \in A.$$

3 Ejercicio (criterio de conjunto convexo, excluyendo casos triviales)**.** Sea $A \subseteq V$. Demostrar que A es convexo si, y solo si, para cualesquiera a, b en A tales que $a \neq b$, y para cualquier λ en $]0, 1[$,

$$(1 - \lambda)a + \lambda b \in A.$$

4 Ejercicio (combinación convexa de una lista de vectores)**.** Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sea $v \in V$. Se dice que v es una *combinación convexa* de los vectores $a_1, \ldots, a_m$, si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ tales que

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1, \qquad v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k.$$

5 Ejercicio (definición constructiva de la envoltura convexa)**.** Sea $A \subseteq V$. Definimos $\operatorname{conv}(A)$ de la siguiente manera:

$$\operatorname{conv}(A) \coloneqq \left\{ v \in V\colon \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \exists a_1, \ldots, a_m \in A \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0 \quad \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1 \quad \wedge \quad v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k \right) \right\}.$$

En otras palabras, $\operatorname{conv}(A)$ consiste de las combinaciones convexas de algunos elementos de A. Se recomienda entender y reproducir esta definición.

6 Ejercicio. Sea $A \subseteq V$. Para cada m en $\mathbb{N}$, definimos $\operatorname{conv}_m(A)$ de la siguiente manera:

$$\operatorname{conv}_m(A) \coloneqq \Biggl\{ v \in V\colon \quad \exists a_1,\ldots,a_m \in A \quad \exists \lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0 \quad \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1 \quad \wedge \quad v = \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k \right) \Biggr\}.$$

En otras palabras, $\operatorname{conv}_m(A)$ consiste de las combinaciones convexas de algunos m elementos de A. Mostrar que

$$\operatorname{conv}(A) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \operatorname{conv}_m(A).$$

7 Ejercicio. Sea $A \subseteq V$. Encontrar $\operatorname{conv}_1(A)$.

8 Ejercicio (la envoltura convexa de un conjunto siempre contiene a este conjunto)**.** Sea $A \subseteq V$. Demostrar que $A \subseteq \operatorname{conv}(A)$.

La envoltura convexa de cualquier conjunto es convexa

9 Ejercicio. Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \in V$, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2 \geq 0$, tales que

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1, \qquad \eta_1 + \eta_2 = 1,$$

y sea $\lambda \in [0, 1]$. Definimos

$$u \coloneqq \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \qquad v \coloneqq \eta_1 b_1 + \eta_2 b_2, \qquad w \coloneqq (1-\lambda)u + \lambda v.$$

Mostrar que w es una combinación convexa de a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Se recomienda usar los siguientes objetos auxiliares:

$$c_k \coloneqq \begin{cases} a_k, & k \in \{1,2,3\}; \\ b_{k-3}, & k \in \{4,5\}, \end{cases} \qquad \gamma_k \coloneqq \begin{cases} (1-\lambda)\xi_k, & k \in \{1,2,3\}; \\ \lambda\eta_k, & k \in \{4,5\}. \end{cases}$$

10 Ejercicio (teorema: la envoltura convexa de cualquier conjunto es convexa)**.** Sea $A \subseteq V$. Demostrar que el conjunto $\operatorname{conv}(A)$ es convexo. Usar la idea del Ejercicio 9.

Cada conjunto convexo coincide con su envoltura convexa

11 Ejercicio. Sea $A \subseteq V$ un conjunto convexo. Explicar por qué $\operatorname{conv}_1(A) \subseteq A$ y $\operatorname{conv}_2(A) \subseteq A$.

12 Ejercicio. Sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in V$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ tales que $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 1$ y $\lambda_4 \neq 1$. Definimos

$$v \coloneqq \sum_{k=1}^{4} \lambda_k a_k,$$

$$\xi_1 \coloneqq \frac{\lambda_1}{1-\lambda_4}, \qquad \xi_2 \coloneqq \frac{\lambda_2}{1-\lambda_4}, \qquad \xi_3 \coloneqq \frac{\lambda_3}{1-\lambda_4}, \qquad u \coloneqq \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3.$$

Mostrar que

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \geq 0, \qquad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1, \qquad v = (1-\lambda_4)u + \lambda_4 a_4.$$

13 Ejercicio. Sea $A \subseteq V$ y sea $v \in \operatorname{conv}_6(A)$. Encontrar $u \in \operatorname{conv}_5(A)$ y $w \in A$ tales que v sea una combinación convexa de u y w. Usar la idea del Ejercicio 12.

14 Ejercicio (teorema: cada conjunto convexo coincide con su envoltura)**.** Sea A un subconjunto convexo de V. Demostrar que $\operatorname{conv}(A) = A$. En otras palabras, esto significa que en la definición del conjunto convexo podríamos admitir combinaciones convexas de cualquier número finito de vectores. Sugerencia: demostrar por inducción sobre m en $\mathbb{N}$ que

$$\operatorname{conv}_m(A) \subseteq A,$$

donde $\operatorname{conv}_m(A)$ está definido en el Ejercicio 6. Usar la idea de Ejercicios 12 y 13.

Corolarios de los teoremas sobre conjuntos convexas y envolturas convexas

15 Ejercicio (propiedad idempotente de la envoltura convexa)**.** Sea $A \subseteq V$. Demostrar que $\operatorname{conv}(\operatorname{conv}(A)) = \operatorname{conv}(A)$.

16 Ejercicio (la intersección de conjuntos convexos es convexa)**.** Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos convexos de V. Denotemos por B su intersección:

$$B \coloneqq \cap\mathcal{C} = \{v \in V\colon \quad \forall P \in \mathcal{C} \quad v \in P\}.$$

Demostrar que B es convexo.

17 Ejercicio (otra descripción equivalente de la envoltura convexa)**.** Sea $A \subseteq V$. Demostrar que $\operatorname{conv}(A)$ es el más pequeño entre todos los conjuntos convexos que contienen al conjunto A. En otras palabras, demostrar que $\operatorname{conv}(A)$ es el elemento mínimo de la colección

$$\mathcal{C} \coloneqq \{P \subseteq X\colon \quad P \text{ es convexo} \quad \wedge \quad A \subseteq P\}.$$

18 Ejercicio (la envoltura convexa como cierta intersección)**.** Sea $A \subseteq V$. Demostrar que $A = \cap\mathcal{C}$, donde la colección $\mathcal{C}$ está definida en el ejercicio anterior.

Subconjuntos convexos de $\mathbb{R}$

19 Ejercicio (una observación trivial sobre el ínfimo y el supremo)**.** Sea $X \subseteq \mathbb{R}$. Denotamos por a y b su ínfimo y supremo, respectivamente (en general, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$):

$$a \coloneqq \inf(X), \qquad b \coloneqq \sup(X).$$

Explicar por qué $X \subseteq [a, b]$.

20 Ejercicio (el lema principal para demostrar que los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}$ son intervalos)**.** Sea X un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$. Denotamos por a y b su ínfimo y supremo, respectivamente (en general, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$):

$$a \coloneqq \inf(X), \qquad b \coloneqq \sup(X).$$

Demostrar que $]a, b[\subseteq X$.

21 Ejercicio (varias descripciones equivalentes de los intervalos del eje real)**.** Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- X es convexo;
- $]\inf(X), \sup(X)[\subseteq X$;
- X es un intervalo, es decir, existen a y b en $\overline{\mathbb{R}}$ tales que X tiene una de las siguientes formas:
$$]a, b[\,, \qquad]a, b], \qquad [a, b[\,, \qquad [a, b];$$

22 Ejercicio (conjuntos convexos, conexos y conejos)**.** Para los estudiantes que estudiaron elementos de la topología general, se recomienda demostrar que las condiciones del Ejercicio 21 son equivalentes a cada una de las siguientes condiciones:

- X es conexo;
- X es arco-conexo.

Funciones convexas definidas en un espacio vectorial real

En estos ejercicios suponemos que V es un espacio vectorial real o complejo. Entendemos la convexidad en el sentido $\smile$.

23 Ejercicio (definición de función convexa)**.** Sea A un subconjunto convexo de V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *convexa* si para cada a, b en A y cada λ en $[0, 1]$,

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \le (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

24 Ejercicio (criterio de función convexa en términos de su epigrafo)**.** Sea A un subconjunto convexo de V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Definimos el *epigrafo* (o *sobregrafo*) de f de la siguiente manera:

$$E_f := \big\{(x, v) \in A \times \mathbb{R}\colon \quad v \ge f(x)\big\}.$$

Notemos que $V \times \mathbb{R}$ es un espacio vectorial real con las operaciones componente a componente. Demostrar que f es convexa si, y solo si, el conjunto E_f es convexo.

25 Ejercicio (en la definición de función convexa, podemos quitar los casos cuando los puntos coinciden)**.** Sea A un subconjunto convexo de V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Demostrar que f es convexa si, y solo si, para cualesquiera a, b en A que satisfacen $a \ne b$, y cualquier λ en $]0, 1[$,

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \le (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

26 Ejercicio (la desigualdad finita de Jensen para funciones convexas)**.** Sea A un subconjunto convexo de V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa. Demostrar que para cada m en $\mathbb{N}$, cada $a_1, \ldots, a_m$ en A y cada $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \ge 0$, si $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$, entonces

$$f\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k a_k\right) \le \sum_{k=1}^m \lambda_k f(a_k).$$

27 Ejercicio (funciones estrictamente convexas)**.** Escribir la definición de función estrictamente convexa. Sugerencia: los puntos $a, b, (1-\lambda)a + \lambda b$ deben ser diferentes a pares. Esto se puede garantizar con las condiciones $a \ne b$ y $0 < \lambda < 1$.

28 Ejercicio (desigualdad finita de Jensen para funciones estrictamente convexas)**.** Enunciar y demostrar la desigualdad finita de Jensen para funciones estrictamente convexas.

Funciones convexas definidas en intervalos del eje real

29 Ejercicio. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Recordar la definición de las diferencias divididas del primer orden. Demostrar que

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \Delta_f(x_2, x_1).$$

30 Ejercicio. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Recordar la definición de las diferencias divididas del segundo orden. Representar $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ como una combinación lineal de $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, con coeficientes que no dependen de f. Mostrar que $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ es simétrica respecto a x_1, x_2, x_3.

31 Ejercicio (criterio de la convexidad de una función en términos de diferencias divididas del primer orden)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in A$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(c) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_1, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in A$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(d) $\Delta_f(x_1, x_3) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in A$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

32 Ejercicio (criterio de la convexidad estricta de una función en términos de diferencias divididas del primer orden)**.** Enunciar y demostrar un criterio similar para las funciones estrictamente convexas.

33 Ejercicio (criterio de la convexidad de una función en términos de diferencias divididas del segundo orden)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \ge 0$ para todos puntos x_1, x_2, x_3 en A, diferentes a pares.

34 Ejercicio (criterio de la convexidad estricta de una función en términos de diferencias divididas del segundo orden)**.** Enunciar y demostrar un criterio similar para la desigualdad estricta.

35 Ejercicio (ejemplos de funciones cóncavas)**.** Demostrar que las siguientes funciones son cóncavas:

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := -x^2$.
- $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) := \sqrt{x}$.
- $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) := \min\{x, 1\}$.

36 Ejercicio (propiedad subaditiva para funciones cóncavas)**.** Sea $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una función cóncava, Además, supongamos que $f(0) \geq 0$. Demostrar que para cada $a, b \geq 0$,

$$f(a+b) \leq f(a) + f(b).$$

Sugerencia. Un camino posible es aplicar la desigualdad $f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ primero con $x = 0$, $y = a+b$, $\lambda = \frac{b}{a+b}$, luego con $x = 0$, $y = a+b$, $\lambda = \frac{a}{a+b}$, y después sumar las dos desigualdades obtenidas.

37 Ejercicio (composición de una función cóncava con una distancia)**.** Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una función cóncava. Supongamos que $f(0) = 0$ y $f(t) > 0$ para $t > 0$. Demostrar que $\rho \coloneqq f \circ d$ también es una distancia.

38 Ejercicio (composición de una función cóncava con una pseudodistancia)**.** Sea (X, d) un espacio pseudométrico y sea $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una función cóncava y tal que $f(0) = 0$. Definimos $d_1\colon X^2 \to [0,+\infty)$, $d_1(x,y) \coloneqq f(d(x,y))$. Demostrar que d_1 es una pseudodistancia.

Derivadas laterales de las funciones convexas definidas en intervalos de la recta real

39 Ejercicio (la derivada izquierda de una función convexa)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa y sea $x \in A\setminus$, $x \neq \inf(A)$. Demostrar que

$$\lim_{t \to x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \sup_{\substack{t<x \\ t\in A}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Denotemos este límite por $f'_{\text{izq}}(x)$. Demostrar que

$$f'_{\text{izq}}(x) > -\infty.$$

40 Ejercicio (la derivada derecha de una función convexa)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa y sea $x \in A\setminus$, $x \neq \sup(A)$. Demostrar que

$$\lim_{t \to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \inf_{\substack{t>x \\ t\in A}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Denotamos este límite por $f'_{\text{der}}(x)$. Demostrar que

$$f''_{\text{der}}(x) < +\infty.$$

41 Ejercicio (la derivada izquierda y derecha de la función cuya gráfica es la semicircunferencia inferior)**.** Definimos $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \coloneqq -\sqrt{1-x^2}.$$

Calcular $f'_{\text{der}}(-1)$ y $f'_{\text{izq}}(1)$.

42 Ejercicio (comparación de la derivada izquierda con la derivada derecha de una función convexa)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa y sea $x \in \operatorname{int}(A)$. Demostrar que

$$-\infty < f'_{\text{izq}}(x) \leq f'_{\text{der}}(x) < +\infty.$$

43 Ejercicio (la derivada izquierda de una función convexa crece)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa. Demostrar que la función f'_{izq} crece en $A \setminus \{\inf(A)\}$.

44 Ejercicio (la derivada derecha de una función convexa crece)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa. Demostrar que la función f'_{der} crece en $A \setminus \{\sup(A)\}$.

Criterios de convexidad en términos de las derivadas, para funciones definidas en intervalos de la recta real

45 Ejercicio (teorema: criterio de la convexidad de una función en términos de su primera derivada)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en A y derivable en $\operatorname{int}(A)$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) f' es creciente en $\operatorname{int}(A)$.

46 Ejercicio (corolario: criterio de la convexidad de una función en términos de su segunda derivada)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en A y dos veces derivable en $\operatorname{int}(A)$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) $f''(x) \geq 0$ para todo x en $\operatorname{int}(A)$.

47 Ejercicio (convexidad estricta de una función cuya primera derivada crece estrictamente)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en A y derivable en $\operatorname{int}(A)$. Supongamos que f' es estrictamente creciente. Demostrar que f es estrictamente convexa, es decir, si $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ y $\alpha \in]0,1[$, entonces

$$f((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) < (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2).$$

48 Ejercicio (convexidad estricta de una función cuya segunda derivada es estrictamente positiva)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en A y dos veces derivable en $\operatorname{int}(A)$. Supongamos que $f''(x) > 0$ para cada x en $\operatorname{int}(A)$. Demostrar que f es estrictamente convexa.

49 Ejercicio (¿si una función es estrictamente convexa, su derivada debe crecer de manera estricta?)**.** Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $f\colon A \to \mathbb{R}$ es una función continua en A y derivable en $\operatorname{int}(A)$. Además, supongamos que f es convexa. ¿Podemos afirmar que f' crece de manera estricta? Escribir una demostración o construir un contraejemplo.

50 Ejercicio (¿si una función es estrictamente convexa, su segunda derivada debe ser estrictamente positiva?)**.** Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $f\colon A \to \mathbb{R}$ es una función continua en A y dos veces derivable en $\operatorname{int}(A)$. Además, supongamos que f es convexa. ¿Podemos afirmar que $f''(x) > 0$ para cada x en $\operatorname{int}(A)$? Escribir una demostración o construir un contraejemplo.

51 Ejercicio (una cota inferior para la función seno)**.** Sea $f\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq -\operatorname{sen}(x)$. Demostrar que f es extrictamente convexa. Demostrar que para cada x en $]0, \pi/2[$,

$$\operatorname{sen}(x) > \frac{2}{\pi}\, x.$$

La convexidad de la función potencia y sus aplicaciones

52 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty[$. Definimos $\varphi\colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ mediante la regla

$$\varphi(t) \coloneqq t^p.$$

Demostrar que φ es convexa.

53 Ejercicio. Sean $a, b \geq 0$, $p \in [1, +\infty[$. Demostrar que

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Sugerencia: usar el resultado del Ejercicio 52.

54 Ejercicio. Sea $p \in]1, +\infty[$. Definimos $\varphi\colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ mediante la regla

$$\varphi(t) \coloneqq t^p.$$

Demostrar que φ es estrictamente convexa.

55 Ejercicio. Sea $p \in]0, 1[$. Definimos $\varphi\colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ mediante la regla

$$\varphi(t) \coloneqq t^p.$$

Demostrar que φ es estrictamente cóncava, es decir, $-\varphi$ es estrictamente convexa.

Desigualdad de Young

56 Ejercicio (algunas propiedades de la función exponencial)**.** Definimos $\exp_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se puede definir mediante la regla

$$\exp_{\mathbb{R}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Demostrar que para cualesquiera x, y en $\mathbb{R}$ se cumple la igualdad

$$\exp_{\mathbb{R}}(x+y) = \exp_{\mathbb{R}}(x) \exp_{\mathbb{R}}(y).$$

Demostrar que para cualquier x en $\mathbb{R}$ se cumple

$$\exp_{\mathbb{R}}(-x) = \frac{1}{\exp_{\mathbb{R}}(x)}.$$

Demostrar que

$$\exp_{\mathbb{R}}' = \exp_{\mathbb{R}}.$$

Demostrar que $\exp_{\mathbb{R}}(x) > 0$ para cada x en $\mathbb{R}$.

57 Ejercicio (convexidad de la función exponencial)**.** Demostrar que $\exp_{\mathbb{R}}$ es una función convexa. Mostrar que para todos $x, y \geq 0$ y todos $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$ se cumple la desigualdad

$$x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y.$$

58 Ejercicio (convexidad estricta de la función exponencial)**.** Usando el resultado del Ejercicio 47 demostrar que la función exponencial $\exp + \mathbb{R}$ es estrictamente convexa. Demostrar que para todos $x, y \geq 0$, tales que $x \neq y$, y todos $\alpha, \beta > 0$, tales que $\alpha + \beta = 1$, se cumple la desigualdad

$$x^\alpha y^\beta < \alpha x + \beta y.$$

59 Ejercicio (la desigualdad de Young)**.** Sean $a, b \geq 0$ y sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Demostrar que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

60 Ejercicio (la desigualdad estricta de Young)**.** Sean $a, b \geq 0$ y sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $a^p \neq b^p$. Demostrar que

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Sugerencia: usar el resultado del Ejercicio 58.

61 Ejercicio (el caso de igualdad en la desigualdad de Young)**.** Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Supongamos que

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostrar que $a^p = b^q$. Sugerencia: usar el resultado del Ejercicio 60.

Rectas básicas para las gráficas de funciones convexas

62 Ejercicio (existencia de una recta básica de la gráfica de una función convexa)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, sea $c \in \operatorname{int}(A)$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa. Sea $\alpha \in [f'_{\text{izq}}(c), f'_{\text{der}}(c)]$. Demostrar que para cada x en A se cumple la desigualdad

$$f(x) \geq \alpha(x - c) + f(c).$$

En particular, si f es derivable en c, entonces para cada x en A se cumple la desigualdad

$$f(x) \geq f'(c)(x - c) + f(c).$$

63 Ejercicio (la desigualdad de Bernoulli para las potencias no necesariamente enteras)**.** Sean $p \geq 1$, $a \geq -1$. Demostrar que

$$(1 + a)^p \geq 1 + pa.$$

64 Ejercicio (la desigualdad estricta de Bernoulli para potencias no necesariamente enteras)**.** Sean $p > 1$, $a > -1$, $a \neq 0$. Demostrar que

$$(1 + a)^p > 1 + pa.$$

La desigualdad integral de Jensen

65 Ejercicio (la desigualdad integral de Jensen para espacios de probabilidad)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$, $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, A)$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa. Demostrar que

$$g\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right) \leq \int_X g \circ f \,\mathrm{d}\mu.$$

Sugerencias. Sean

$$a \coloneqq \inf(A), \qquad b \coloneqq \sup(A), \qquad c \coloneqq \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Considerar por separado los casos cuando $c = a$ o $c = b$. En el caso principal, cuando $a < c < b$, usar la recta básica de la gráfica de la función g en el punto con la abscisa c.

66 Ejercicio (la desigualdad de Jensen para espacios de medida finita)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $0 < \mu(X) < +\infty$, $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, A)$ y $g \colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa. Demostrar que

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(X)} \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu\right) \le \frac{1}{\mu(X)} \int\limits_X \varphi \circ f \, \mathrm{d}\mu.$$

Sugerencia: considerar la medida normalizada $\nu(Y) \coloneqq \frac{\mu(Y)}{\mu(X)}$, es decir, la medida μ con peso $\frac{1}{\mu(X)}$.

67 Ejercicio (la desigualdad de Jensen para la función potencia)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $0 < \mu(X) < +\infty$, $0 < p < +\infty$, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, [0, +\infty[\,)$. Demostrar que

$$\left(\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu\right)^p \le \mu(X)^{p-1} \int\limits_X f^p \, \mathrm{d}\mu.$$

68 Ejercicio (una combinación convexa como una integral sobre un espacio de probabilidad discreto)**.** Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \ge 0$ tales que

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k,$$

y sean $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}$. Pongamos $X \coloneqq \{1, \ldots, m\}$, $\nu \colon 2^X \to [0, 1]$,

$$\nu(Y) \coloneqq \sum_{k \in Y} \lambda_k,$$

y definimos $f \colon X \to \mathbb{R}$,

$$f(k) \coloneqq v_k.$$

Demostrar que

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k v_k = \int\limits_X f \, \mathrm{d}\nu.$$

69 Ejercicio (la desigualdad finita de Jensen se puede ver como un corolario de la desigualdad integral de Jensen)**.** Demostrar la desigualdad del Ejercicio 26 usando la desigualdad integral de Jensen del Ejercicio 65. Sugerencia: aplicar la idea del Ejercicio 68.