Varios modos de convergencia

Problemas para examen

Estos problemas están redactados por Egor Maximenko, con ayuda de Breitner Arley Ocampo Gómez.

Varios modos de convergencia

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Dada una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$ y una función $\mathcal{F}$-medible $g\colon X \to \mathbb{C}$ usamos las siguientes notaciones:

$$A(\varepsilon, n) = \bigl\{x \in X\colon |f_n(x) - g(x)| \ge \varepsilon\bigr\}, \qquad B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n),$$

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k=1}^{\infty} B(\varepsilon, k), \qquad D = \bigcup_{\varepsilon>0} C(\varepsilon).$$

1. Monotonía de las familias $\boldsymbol{A, B, C, D}$. Para cada una de las siguientes familias o sucesiones estudie si es creciente o decreciente o en general no tiene ninguna de estas dos propiedades. En el último caso hay que dar un contraejemplo.

1. Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Estudie la monotonía de la sucesión $\bigl(A(\varepsilon, n)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$. Muestre con ejemplos que esta sucesión no siempre es monótona.
2. Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Estudie la monotonía de la sucesión $\bigl(B(\varepsilon, k)\bigr)_{k\in\mathbb{N}}$.
3. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Estudie la monotonía de la familia $\bigl(A(\varepsilon, n)\bigr)_{\varepsilon>0}$.
4. Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. Estudie la monotonía de la familia $\bigl(B(\varepsilon, k)\bigr)_{\varepsilon>0}$.
5. Estudie la monotonía de la familia $\bigl(C(\varepsilon)\bigr)_{\varepsilon>0}$.

2. Descripción de los puntos de no convergencia. Demuestre que para todo $x \in X$,

$$f_n(x) \not\to g(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in D.$$

3. Criterio de convergencia puntual. Usando el resultado de 2 muestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f_n \xrightarrow{X} g$.

(b) $D = \varnothing$.

(c) $\forall \varepsilon > 0 \quad C(\varepsilon) = \varnothing$.

4. Criterio de convergencia en casi todas partes. Usando el resultado de 2 muestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

(b) $\mu(D) = 0$.

(c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(C(\varepsilon)) = 0$.

5. Criterio de convergencia uniforme. Describa la condición $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$ en términos de los conjuntos $B(\varepsilon, k)$.

6. Criterio de convergencia uniforme en el complemento de un conjunto. Sea $E \in \mathcal{F}$. Describa la condición $f_n \overset{X\setminus E}{\Longrightarrow} g$ en términos de los conjuntos $B(\varepsilon, k)$.

7. Criterio de convergencia casi uniforme. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f_n converge casi uniformemente a g con respecto a la medida μ.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$ y todo $\delta > 0$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu\big(B(\varepsilon, k)\big) < \delta$.

(c) Para todo $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \mu\big(B(\varepsilon, k)\big) = 0$.

Observación: las implicaciones (a)⇒(b)⇒(c)⇒(b) se demuestran de manera natural. La demostración de la implicación (b)⇒(a) es no trivial y utiliza la "contrucción diagonal de Egórov".

En los criterios de convergencia es suficiente trabajar con ε pequeños

8. En la fórmula para D, es suficiente trabajar con ε pequeños. Sea $\varepsilon_1 > 0$. Definimos D_1 como

$$D_1 \coloneqq \bigcup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)} C(\varepsilon).$$

I. Demostrar que $D = D_1$. Sugerencia: si $\varepsilon \geq \varepsilon_1$, entonces comparar $C(\varepsilon)$ con $C(\varepsilon_1/2)$, usando el resultado sobre la monotonía de la familia $(C(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$.

II. Como una consecuencia del Problema 2 y del inciso I,

$$f_n \xrightarrow{X} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad D_1 = \varnothing.$$

III. Como una consecuencia del Problema 2 y del inciso I,

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu(D_1) = 0.$$

9. En el criterio de la convergencia uniforme, es suficiente trabajar con ε pequeños. Sea $\varepsilon_1 > 0$. Demostrar que

$$f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1) \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, k) = \varnothing.$$

10. En el criterio de la convergencia casi uniforme, es suficiente trabajar con ε pequeños. Sea $\varepsilon_1 > 0$. Demostrar que

$$f_n \overset{\mu\text{-c.u.}}{\Longrightarrow} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1) \qquad \lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

11. En el criterio de la convergencia casi uniforme, es suficiente trabajar con ε pequeños. Sea $\varepsilon_1 > 0$. Demostrar que

$$f_n \overset{\mu}{\to} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1) \qquad \lim_{n\to\infty} \mu(A(\varepsilon, n)) = 0.$$

Ejemplos de análisis de varios tipos de convergencia

Se propone el siguiente plan para analizar varios tipos de convergencia:

a) Investigar la convergencia puntual, esto es, para todo punto $x \in X$ investigar la convergencia de la sucesión numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Determinar si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente o casi en todas partes a una función g.

c) Para todo $n \in \mathbb{N}$ calcular $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)|$.

d) Usando el resultado del inciso c) determinar si la convergencia es uniforme.

e) Para todos $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. Aquí ε_0 puede ser cualquier número positivo, por ejemplo en algunos ejemplos es cómodo elegir $\varepsilon_0 = 1$ o sea suponer que $\varepsilon \in (0, 1)$.

f) Determinar si f_n converge a g en la medida μ. Usar el resultado del inciso e).

g) Para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ y todo $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$ usando el resultado del inciso e).

h) Usando el resultado del inciso g) determinar si la convergencia es uniforme y comprobar el resultado del inciso d).

i) Para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ calcular $C(\varepsilon)$.

j) Calcular D. Comprobar el resultado del inciso b).

k) Usando el resultado del inciso g) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme llamada también la convergencia de Egórov.

l) En el caso de la respuesta positiva en k), para un $\eta > 0$ arbitrario construir un conjunto E tal que $\mu(E) < \eta$ y $f_n \xrightarrow[]{X \setminus E} g$.

Analice varios tipos de convergencia en los siguientes ejemplos:

12. $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x^2}.$$

13. $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 x^2}.$$

14. $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = 1_{[n,n+1)} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

15. $X = [0, 1)$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = x^n \qquad (x \in [0, 1),\ n \in \mathbb{N}).$$

16. $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^2} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

17. $X = (0, 1]$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = n \cdot 1_{(0,1/n]} = \begin{cases} n, & x \in (0, 1/n], \\ 0, & x \in (1/n, 1]. \end{cases}$$

18. $X = (0, +\infty)$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} \qquad (x > 0,\ n \in \mathbb{N}).$$

19. $X = [0, 1]$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) = 4^n x^n (1 - x)^n \qquad (x \in [0, 1],\ n \in \mathbb{N}).$$

20. $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue,

$$f_n(x) \coloneqq \frac{n}{|x - n| + n}.$$

Comparación de varios modos de convergencia

Para demostrar los siguientes resultados se recomienda aplicar los criterios 4 y 7.

21. Demuestre que la convergencia casi uniforme implica la convergencia casi en todas partes.

22. Demuestre que la convergencia casi uniforme implica la convergencia en medida.

23. Teorema de Egórov. Demuestre que en el caso de un espacio de medida finita la convergencia casi en todas partes implica la convergencia casi uniforme.

24. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$ que converge en la medida μ a una función $\mathcal{F}$-medible $g\colon X \to \mathbb{C}$. Demuestre que existe una subsucesión $(f_{n_p})_{p=1}^{\infty}$ que converge a g casi uniformemente con respecto a la medida μ.

Convergencia de Cauchy en medida

25. Decimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida μ, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq k \qquad \mu(A(\varepsilon, m, n)) < \delta,$$

donde

$$A(\varepsilon, m, n) \coloneqq \big\{x \in X\colon \quad |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\big\}.$$

Demostrar que la convergencia en medida μ implica la convergencia de Cauchy en medida.

26. Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu} g$ y $f_n \xrightarrow{\mu} h$. Demostrar que g y h son iguales μ-c.t.p., esto es, $\mu(Y) = 0$, donde

$$Y \coloneqq \big\{x \in X\colon \ g(x) \neq h(x)\big\}.$$

Sugerencia. Considerar los conjuntos

$$\begin{aligned} Z(\varepsilon) &\coloneqq \big\{x \in X\colon \ |g(x) - h(x)| \geq \varepsilon\big\}, \\ A_g(\varepsilon, n) &\coloneqq \big\{x \in X\colon \ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\big\}, \\ A_h(\varepsilon, n) &\coloneqq \big\{x \in X\colon \ |f_n(x) - h(x)| \geq \varepsilon\big\}. \end{aligned}$$

Demostrar que $Y = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} Z(1/p)$ y relacionar los conjuntos $Z(1/p)$ con los conjuntos $A_g(\varepsilon, n)$ y $A_h(\varepsilon, n)$.