Operadores lineales acotados en espacios de Hilbert

Problemas para examen

En todos los ejercicios, si no está escrita otra condición sobre H, estamos suponiendo que H es un espacio de Hilbert complejo. Usamos el convenio que el producto interno es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugado respecto al segundo argumento.

Operadores lineales acotados y formas sesquilineales acotadas

1 Ejercicio. Escriba la definición de una forma sesquilineal (lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo argumento).

2 Ejercicio (varias definiciones equivalentes de la norma de una forma sesquilineal)**.** Sea $F\colon H \times H \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Muestre las siguientes igualdades:

$$\sup_{x,y\in H\setminus\{0_H\}} \frac{|F(x,y)|}{\|x\|\,\|y\|} = \sup_{\substack{x,y\in H\\ \|x\|\le 1,\ \|y\|\le 1}} |F(x,y)| = \sup_{\substack{x,y\in H\\ \|x\|=\|y\|=1}} |F(x,y)|$$

$$= \operatorname{ínf}\{C\in[0,+\infty]\colon\ \forall x,y\in H\ |F(x,y)|\le C\|x\|\,\|y\|\}.$$

Si estas expresiones son finitas, decimos que la forma sesquilineal F es *acotada*. Denotamos por $\mathcal{B}_2(H)$ al conjunto de todas las formas sesquilineales acotadas $H \times H \to \mathbb{C}$.

3 Ejercicio. Demuestre que $\mathcal{B}_2(H)$ es un espacio de Banach.

4 Ejercicio (la forma sesquilineal asociada a un operador lineal acotado)**.** Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Definimos $F_A\colon H \times H \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$F_A(x,y) \coloneqq \langle Ax, y\rangle.$$

Demuestre que $F_A \in \mathcal{B}_2(H)$ y que $\|F_A\| = \|A\|$.

5 Ejercicio (teorema de representación de Riesz–Fréchet para formas sesquilineales acotadas)**.** Sea $G \in \mathcal{B}_2(H)$. Demuestre que existe $A \in \mathcal{B}(H)$ tal que para cualesquiera x, y en H

$$G(x,y) = \langle Ax, y\rangle.$$

Sugerencias: para cada x en H considerar el funcional lineal $\varphi_x(y) \coloneqq \overline{G(x,y)}$ y aplicar el teorema de Riesz–Fréchet sobre la representación de funcionales lineales acotados.

6 Ejercicio. Definimos $\Phi\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}_2(H)$ mediante la regla

$$\Phi(A)(x, y) := \langle Ax, y\rangle.$$

Muestre que Φ es un isomorfismo isométrico de espacios de Banach.

7 Ejercicio (la identidad de polarización para la forma sesquilineal inducida por un operador lineal acotado)**.** Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Demuestre que

$$\langle Ax, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \langle A(x + \mathrm{i}^k y), x + \mathrm{i}^k y\rangle.$$

Operador adjunto

8 Ejercicio (teorema sobre la existencia y unicidad del operador adjunto)**.** Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Muestre que existe un único B en $\mathcal{B}(H)$ tal que para cualesquiera x, y en H

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle.$$

Sugerencia: utilice el resultado del Ejercicio 5.

9 Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Demuestre que para cualesquiera x, y en H

$$\langle x, Ay\rangle = \langle A^*x, y\rangle.$$

10 Ejercicio (propiedades aritméticas de la operación $A \mapsto A^*$)**.** Sean $A, B \in \mathcal{B}(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Demuestre las siguientes propiedades.

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$.

2. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.

3. $(AB)^* = B^* A^*$.

4. $(A^*)^* = A$.

Operadores autoadjuntos

11 Ejercicio (relación entre la forma sesquilineal y la forma cuadrática inducidas por un operador autoadjunto)**.** Sea $A \in \mathcal{B}(H)$ tal que $A^* = A$. Demuestre que

$$\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle) = \frac{1}{4}\big(\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle\big).$$

12 Ejercicio (la norma del operador autoadjunto coincide con la norma de la forma cuadrática inducida por este operador)**.** Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Demuestre que

$$\|A\| = \sup_{x \in H\setminus\{0_H\}} \frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|x\|^2}.$$

Operadores normales

13 Definición. Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Se dice que A es *normal* si $AA^* = A^*A$.

14 Ejercicio (la parte real y la parte imaginaria de un operador)**.** Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Demuestre que existe un único par de operadores autoadjuntos (B, C) tal que $A = B + \mathrm{i}\, C$. Estos operadores se denotan por $\operatorname{Re}(A)$ e $\operatorname{Im}(A)$, respectivamente.

15 Ejercicio (criterio del operador normal)**.** Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $A^*A = AA^*$;

(b) $\operatorname{Re}(A)\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(A)\operatorname{Re}(A)$;

(c) para cada x en H, $\|Ax\| = \|A^*x\|$.

Operadores de multiplicación

16 Ejercicio (la norma del operador de multiplicación)**.** Sea $a \in \ell^{(}\mathbb{N})$. Denotemos por M_a el operador de multiplicación por a en el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$:

$$(M_a x)_j := a_j x_j.$$

Demuestre que M_a es acotado y $\|M_a\| = \|a\|_\infty$.

17 Ejercicio (propiedades aritméticas de los operadores de multiplicación)**.** Sean $a, b \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Demuestre las siguientes fórmulas.

1. $M_a + M_b = M_{a+b}$;

2. $\lambda M_a = M_{\lambda a}$;

3. $M_a M_b = M_{ab}$, donde ab es el producto de las suceciones a y b por componentes;

4. $M_a^* = M_{\overline{a}}$, donde $\overline{a}$ es la sucesión que se obtiene de la sucesión a al conjugar cada componente.

18 Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Supongamos que A es un operador invertible. Pongamos

$$C := \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Demuestre que $\|Ax\| \geq C\|x\|$ para cada x en H.

19 Ejercicio (invertibilidad del operador de multiplicación)**.** Sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Demuestre que las siguientes tres condiciones son equivalentes:

(a) M_a es invertible;

(b) $\inf_{k \in \mathbb{N}} |a_k| > 0$;

(c) $0 \notin \operatorname{clos}(\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\})$.

20 Ejercicio. Sea a la sucesión definida como $a_k = 1/k$. Demuestre que el operador M_a en el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$ es inyectivo, pero no es invertible.

21 Ejercicio (¿cuándo el operador de multiplicación es autoadjunto? ¿cuándo es normal?)**.** Sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

1. Demuestre que el operador M_a es normal.

2. Demuestre que M_a es autoadjunto si, y sólo si, $a_k \in \mathbb{R}$ para cada k en $\mathbb{R}$.

3. Demuestre que M_a es unitario si, y sólo si, $|a_k| = 1$ para cada k en $\mathbb{R}$.

La función exponencial de un operador

22 Ejercicio (la función exponencial de un operador, repaso)**.** Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Se define $\exp(A)$ mediante la regla

$$\exp(A) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Demuestre que esta serie converge en $\mathcal{B}(H)$.

23 Ejercicio (el producto de las funciones exponenciales de dos operadores que conmutan, repaso)**.** Sean $A, B \in \mathcal{B}(H)$ tales que $AB = BA$. Demuestre que

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A).$$

24 Ejercicio (pasar de un operador autoadjunto a un operador unitario)**.** Sea $A \in \mathcal{B}(H)$ tal que $A = A^*$. Pongamos $B = \exp(\mathrm{i}\, A)$. Demuestre que B es unitario.