Operadores lineales acotados
en espacios de Banach

Problemas para examen

Definición de operadores lineales acotados

Sean X, Y espacios normados. Suponemos que X es no nulo: $X \neq \{0_X\}$. Denotamos por $\mathcal{B}(X,Y)$ al conjunto de los operadores lineales acotados $X \to Y$.

1 Ejercicio. Sea $T\colon X \to Y$ un operador lineal. Demostrar la equivalencia de cuatro fórmulas para la norma de $\|T\|$.

2 Ejercicio. Sea $T\colon X \to Y$ un operador lineal. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- $\|T\| < +\infty$.
- T es una función Lipschitz continua.
- T es una función uniformemente continua.
- T es una función continua.
- T es una función continua en el punto 0_X.
- T es una función continua en algún punto de X.
- $T(B(0_X, 1))$ es un conjunto acotado en Y.

3 Ejercicio. Demostrar que el espacio $\mathcal{B}(X,Y)$, dotado de la norma de operadores, es un espacio normado.

4 Ejercicio. Sean X, Y, Z espacios normados y sean $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, $U \in \mathcal{B}(Y,Z)$. Denotemos por UT a la composición $U \circ T$. Demostrar que $UT \in \mathcal{B}(X,Z)$ y $\|UT\| \leq \|U\|\,\|T\|$.

5 Ejercicio. Sea X un espacio normado y sea Y un espacio de Banach. Demostrar que $\mathcal{B}(X,Y)$ es un espacio de Banach.

Ejemplos de operadores lineales

6 Ejercicio. Sea $p \in [1,+\infty)$ y sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Definimos $M_a\colon \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ mediante la regla

$$M_a x \coloneqq (a_k x_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Calcular $M_a e_p$, donde $e_p = (\delta_{p,k})_{k\in\mathbb{N}}$. Demostrar que $\|M_a\| = \|a\|_\infty$.

7 Ejercicio. Sea $p \in [1,+\infty)$ y sean $a, b \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Demostrar que $M_{1_\mathbb{N}} = I$ y $M_a M_b = M_{ab}$, donde $1_\mathbb{N}$ es la sucesión constante 1 y ab es el producto de las sucesiones a y b por componentes.

8 Ejercicio. Sea $p \in [1,+\infty)$ y sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Denotemos por M_a al operador del Ejercicio 6. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) M_a es invertible;

(b) $\inf_{k\in\mathbb{N}} |a_k| > 0$;

(c) $0 \notin \operatorname{cl}\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$.

9 Ejercicio. Sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Definimos $M_a\colon \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ mediante la regla

$$M_a x \coloneqq (a_k x_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Encontrar $\|M_a\|$.

10 Ejercicio. Sea $p \in [1,+\infty)$. Recordar las definiciones de los operadores de desplazamiento a la izquierda y a la derecha en el espacio $\ell^p(\mathbb{Z})$. Demostrar que estos operadores son invertibles e isométricos.

11 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Recordar las definiciones de los operadores de desplazamiento a la izquierda y a la derecha en el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$. Calcular sus normas $\|L\|$ y $\|R\|$ y sus productos LR y RL. Determinar, si alguno de estos operadores es isométrico. Para cada uno de estos dos operadores calcular su núcleo e imagen y determinar si tiene propiedad inyectiva o suprayectiva.

12 Ejercicio. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida, $\mu(X) < +\infty$, $\nu(Y) < +\infty$, y sea $K \in L^\infty(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \otimes \nu)$. Sea $p \in [1, +\infty]$. Definimos $A_K \colon L^p(X, \mu) \to L^p(Y, \nu)$ mediante la siguiente regla:

$$(A_K f)(x) \coloneqq \int_Y K(x, y) f(y) \, \mathrm{d}\nu(y).$$

Demostrar que el operador A_K es acotado.

13 Ejercicio (un caso particular de la prueba de Schur)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida y sea $K \colon X \times Y \to \mathbb{C}$ una función $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-medible. Supongamos que

$$C_1 \coloneqq \sup_{x \in X} \int_Y |K(x, y)| \, \mathrm{d}\nu(y) < +\infty, \qquad C_2 \coloneqq \sup_{y \in Y} \int_X |K(x, y)| \, \mathrm{d}\mu(x) < +\infty.$$

Definimos $A_K \colon L^2(X, \mu) \to L^2(Y, \nu)$ mediante la siguiente regla:

$$(A_K f)(x) \coloneqq \int_Y K(x, y) f(y) \, \mathrm{d}\nu(y).$$

Demostrar que A_K es acotado y $\|A_K\| \le \sqrt{C_1 C_2}$.

Funcionales lineales acotados

Dado un espacio normado (real o complejo) V, denotamos por V^* al conjunto de todos los funcionales lineales acotados definidos en V. En otras palabras, $V^* = \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$, si V es complejo, y $V^* = \mathcal{B}(V, \mathbb{R})$, si V es real.

14 Ejercicio. Escribir 4 fórmulas equivalentes para la norma del funcional lineal.

15 Ejercicio. Sea $f \colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal. Mostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- $\|f\| < +\infty$.
- f es una función Lipschitz continua.
- f es una función uniformemente continua.
- f es una función continua.
- f es una función continua en el punto 0_V.
- f es una función continua en algún punto de V.

16 Ejercicio. Sea V un espacio normado. Demostrar que el espacio V^* es de Banach.

17 Ejercicio (el lema principal para el teorema de Hahn–Banach)**.** Sean V un espacio normado real, W un subespacio de V, $u \in V \setminus W$, $f \in W^*$. Demostrar que existe $F \in (W + \mathbb{R}u)^*$ tal que $F|_W = f$ y $\|F\| = \|f\|$.

18 Ejercicio. Enunciar y demostrar el teorema de Hahn–Banach para el caso real.

19 Ejercicio. Enunciar el teorema de Hahn–Banach para espacios normados complejos. Mostrar como deducirlo del teorema de Hahn–Banach para espacios normados reales.

20 Ejercicio. Demostrar el siguiente corolario del teorema de Hahn–Banach. Dado un vector no nulo v en V, existe un funcional lineal acotado f que no se anula en v. Más precisamente, f se puede construir de tal manera que $\|f\| = 1$ y $f(v) = \|v\|$.

21 Ejercicio. Sea V un espacio normado y sean v, u en V tales que $v \neq u$. Demostrar que existe f en V^* tal que $f(v) \neq f(u)$.

22 Ejercicio. Sea W un subespacio cerrado de V y sea $u \in V \setminus W$. Demostrar que existe f en V^* tal que $f(u) \neq 0$ y $f(w) = 0$ para cada w en W.

23 Ejercicio. Demostrar el siguiente corolario del teorema de Hahn–Banach: dada una lista $v_1, \ldots, v_m$ linealmente independiente de vectores en V, existe una lista de funcionales $f_1, \ldots, f_m$ en V^* tal que $f_j(v_k) = \delta_{j,k}$ para cualesquiera j, k en $\{1, \ldots, m\}$.

24 Ejercicio (el encaje canónico de un espacio normado en su espacio bidual)**.** Sea V un espacio vectorial normado. Recordar la definición del espacio bidual V^{**}. Definimos $\Lambda\colon V \to V^{**}$ mediante la siguiente regla:

$$\Lambda(v)(f) := f(v) \qquad (v \in V,\ f \in V^*).$$

Demostrar que Λ es una isometría lineal.

25 Ejercicio. Si la función Λ del ejercicio anterior es suprayectiva, se dice que el espacio V es *reflexivo*. Como V^{**} siempre es completo, cada espacio normado reflexivo es completo. Recordar ejemplos de espacios reflexivos. Recordar al menos un ejemplo de espacio no reflexivo.

Teoremas de la transformación lineal abierta y de la gráfica cerrada

26 Ejercicio. Recordar el teorema de Baire. Mostrar el siguiente corolario del teorema de Baire. Sea X un espacio métrico completo no vacío y sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Entonces existe un k en $\mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(E_k)) \neq \varnothing$.

27 Ejercicio. Sea X, Y espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Supongamos que existe $r > 0$ tal que $B_Y(0, 1) \subseteq T(rB_X(0, 1))$. Demostrar que la función T es abierta.

28 Ejercicio. Sea Y un espacio normado y sean P, Q subconjuntos de Y. Demostrar que

$$\operatorname{cl}(P) + \operatorname{cl}(Q) \subseteq \operatorname{cl}(P + Q).$$

29 Ejercicio (teorema de la trasnformación lineal abierta)**.** Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $T(X) = Y$. Demostrar que la función T es abierta.

30 Ejercicio. Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ una transformación lineal continua y biyectiva. Demostrar que su inversa también es continua.

31 Ejercicio. Sea X un espacio vectorial y sean N_1 y N_2 dos normas en X tales que los espacios (X, N_1) y (X, N_2) son completos, y la norma N_2 se domina por N_1, es decir, existe $C > 0$ tal que para cada x en V se cumple la desigualdad $N_2(x) \le C N_1(x)$. Demostrar que las normas N_1 y N_2 son equivalentes.

32 Ejercicio. Sean X, Y espacios vectoriales y sea $T\colon X \to Y$ una transformación lineal. Recordar la definición de la gráfica de T y demostrar que la gráfica de T es un subespacio del espacio vectorial $X \times Y$.

33 Ejercicio. Recordar la definición de la p-suma $X \oplus^p Y$ de espacios de Banach X, Y. Demostrar que las proyecciones naturales $\pi_1\colon X \oplus^p Y \to X$ y $\pi_2\colon X \oplus^p Y \to Y$ son continuas y abiertas.

34 Ejercicio. Enunciar y demostrar el teorema de la gráfica cerrada para transformaciones lineales en espacios de Banach.

El principio de acotación uniforme

Los resultados de los Ejercicios 35 y 36 fueron obtenidos por Banach y Steinhaus.

35 Ejercicio. Enunciar y demostrar el principio de acotación uniforme para colecciones en $\mathcal{B}(X, Y)$, donde X es un espacio de Banach, Y es un espacio normado.

36 Ejercicio. Demostrar el siguiente corolario del principio de acotación uniforme. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{B}(X, Y)$ que converge puntualmente, esto es, para cada x en X existe un vector $S(x)$ en Y tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(x) - S(x)\|_Y = 0.$$

Demostrar que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty,$$

$S \in \mathcal{B}(X, Y)$ y

$$\|S\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|.$$

Sugerencia: mostrar que el principio de acotación uniforme se puede aplicar al conjunto $\{T_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$.

37 Ejercicio. Sea X un espacio de Banach y sea A un subconjunto de X. Demostrar que las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

(a) el conjunto A es acotado;

(b) para cada f en X^*, el conjunto $f[A]$ es acotado.

Se recomienda combinar el principio de acotación uniforme con el Ejercicio 24.

38 Ejercicio. Sean X, Y espacios de Banach sea F un subconjunto de $\mathcal{B}(X,Y)$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) el conjunto F es acotado en $\mathcal{B}(X,Y)$, esto es,

$$\sup_{T\in F} \|T\| < +\infty;$$

(b) para cada x en X y cada f en Y^*, el conjunto $\{f(Tx)\colon\ T \in F\}$ es acotado en $\mathbb{C}$.

Se recomienda combinar el resultado del Ejercicio 37 con el principio de acotación uniforme.

El grupo de operadores lineales acotados invertibles en un espacio de Banach

Sea X un espacio de Banach. Denotemos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ al conjunto de los elementos invertibles en el álgebra $\mathcal{B}(X)$ y por $\operatorname{inv}\colon \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \mathcal{B}(X)$ a la operación de inversión.

39 Ejercicio. Demostrar que $\mathcal{B}(X)$ es una álgebra compleja asociativa con identidad, que es un espacio normado complejo, que la norma tiene la siguiente propiedad *submultiplicativa*:

$$\|ST\| \le \|S\|\,\|T\|,$$

y que $\|I\| = 1$. Por definición, esto significa que $\mathcal{B}(X)$ es una *álgebra de Banach con identidad*.

40 Ejercicio. Demostrar que $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ es un grupo.

41 Ejercicio (sobre la serie de von Neumann)**.** Sea $A \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|A\| < 1$. Demostrar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge, $I - A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$, y

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Más aún, demostrar que

$$\|(I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}, \quad \|(I - A)^{-1} - I\| \le \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}.$$

42 Ejercicio. Usando el resultado del Ejercicio 41 explicar que I pertenece al interior del conjunto $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$, y la función inv es continua en el punto I.

43 Ejercicio. Sea $S \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ y sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que

$$\|T - S\| < \frac{1}{\|S^{-1}\|}.$$

Demostrar que $T \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ y

$$\|T^{-1} - S^{-1}\| \le \frac{\|T - S\| \, \|S^{-1}\|^2}{1 - \|T - S\| \, \|S^{-1}\|}.$$

Sugerencia: escribir T como

$$T = S - (S - T) = S(I - S^{-1}(S - T)) \tag{1}$$

44 Ejercicio. Demostrar que el conjunto $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ es abierto y la función inv es continua. Primer método: usar los resultados del Ejercicio 43. Segundo método: usar la formula (1) y los resultados del Ejercicio 42.

El espectro de un operador lineal acotado

Sea X un espacio de Banach. Dado S en $\mathcal{B}(X)$, el *espectro* de S se define mediante la fórmula

$$\mathrm{Sp}(S) := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \; \lambda I - S \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))\}.$$

Dado S en $\mathcal{B}(X)$, la *función resolvente* de S es $R_S\colon \mathbb{C}\setminus \operatorname{Sp}(S)\to\mathcal{B}(X)$,

$$R_S(\lambda) \coloneqq (\lambda I - S)^{-1}.$$

45 Ejercicio. Sea $S\in\mathcal{B}(X)$. Demostrar que si $\lambda\in\mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > \|S\|$, entonces $\lambda\notin\operatorname{Sp}(S)$ y

$$\|R_S(\lambda)\| \le \frac{1}{|\lambda| - \|S\|}.$$

Por consecuencia, el conjunto $\operatorname{Sp}(S)$ es acotado y

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|R_S(\lambda)\| = 0.$$

46 Ejercicio. Sea $S\in\mathcal{B}(X)$. Demostrar que el conjunto $\operatorname{Sp}(S)$ es cerrado.

47 Ejercicio. Sea $S\in\mathcal{B}(X)$. Demostrar que la función R_S es continua.

48 Ejercicio. Sea $S\in\mathcal{B}(X)$ y sean $\lambda,\nu\in\mathbb{C}\setminus\operatorname{Sp}(S)$. Demostrar que

$$R_S(\lambda) - R_S(\nu) = -(\lambda-\nu)R_S(\lambda)R_S(\nu) = -(\lambda-\nu)R_S(\nu)R_S(\lambda).$$

Por consecuencia, $R_S(\lambda)$ y $R_S(\nu)$ conmutan.

49 Ejercicio. Sean $S\in\mathcal{B}(X)$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\operatorname{Sp}(S)$. Demostrar que

$$\lim_{\nu\to\lambda}\frac{R_S(\nu)-R_S(\lambda)}{\nu-\lambda} = -(R_S(\lambda))^2.$$

50 Ejercicio. Sean $S\in\mathcal{B}(X)$, $\varphi\in\mathcal{B}(X)^*$. Definimos $f\colon\mathbb{C}\setminus\operatorname{Sp}(S)\to\mathbb{C}$ mediante la regla

$$f(\lambda)\coloneqq\varphi(R_S(\lambda)).$$

Demostrar que la función f es holomorfa y

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0.$$

51 Ejercicio (el teorema de Gelfand que el espectro es no vacío)**.** Sea $S\in\mathcal{B}(X)$. Demostrar que $\operatorname{Sp}(S)\neq\varnothing$.

52 Ejercicio (la función resolvente es analítica)**.** Sea $S \in \mathcal{B}(X)$ y sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(S)$. Encontrar un número $r > 0$ y una sucesión $(A_k)_{k=0}^{\infty}$ en $\mathcal{B}(X)$ tales que para cada ν en $\mathbb{C}$ con $|\nu - \lambda| < r$ se cumple

$$R_S(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} (\nu - \lambda)^k A_k.$$

Sugerencia: usar la serie de von Neumann.

Ejemplos del cálculo del espectro

53 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Calcular el espectro de los operadores de desplazamiento a la izquierda y a la derecha en el espacio $\ell^p(\mathbb{Z})$. Ya conocimos a estos operadores en el Ejercicio 10.

54 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Calcular el espectro del operador L de desplazamiento a la izquierda en el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$. Ya conocimos este operador en el Ejercicio 11. Se recomienda el siguiente plan.

- Dado λ en $\mathbb{C}$ con $|\lambda| < 1$, encontrar una sucesión x en $\ell^p(\mathbb{N})$ tal que

  $$Lx = \lambda x.$$

  Se trata de encontrar una solución no trivial de un sistema infinito de ecuaciones lineales homogéneas.

- Usando el resultado del inciso anterior, concluir que para $|\lambda| < 1$ el operador $\lambda I - L$ no es inyectivo y no es invertible.

- Usando el resultado del inciso anterior concluir que $\mathbb{D} \subseteq \mathrm{Sp}(L)$.

- Usando el hecho que $\|L\| = 1$, concluir que $\mathrm{Sp}(L) \subseteq \mathrm{cl}(\mathbb{D})$.

- Usando los resultados de los incisos anteriores y el resultado del Ejercicio 46, encontrar $\mathrm{Sp}(L)$.

55 Ejercicio. Sea $p \in [1, +\infty)$. Calcular el espectro del operador R de desplazamiento a la derecha en el espacio $\ell^p(\mathbb{N})$. Ya conocimos este operador en el Ejercicio 11. Se recomienda el siguiente plan.

- Dado λ en $\mathbb{C}$ con $0 < |\lambda| < 1$, mostrar que no existe ninguna sucesión x en $\ell^p(\mathbb{N})$ tal que $Rx = e_1$. Sugerencia: se trata de analizar un sistema infinito de ecuaciones lineales, de las cuales una es no homogénea, y mostrar que este sistema no puede tener una solución x que pertenezca a $\ell^p(\mathbb{N})$.

- Usando el resultado del inciso anterior, concluir que para $0 < |\lambda| < 1$ el operador $\lambda I - R$ no es sobre y por eso no es invertible.

- Mostrar que el operador R no es sobre.

- Usando los resultados de los incisos anteriores, concluir que $\mathbb{D} \subseteq \mathrm{Sp}(R)$.

- Usando el hecho que $\|R\| = 1$, concluir que $\mathrm{Sp}(R) \subseteq \mathrm{cl}(\mathbb{D})$.

- Usando los resultados de los incisos anteriores y el resultado del Ejercicio 46, encontrar $\mathrm{Sp}(R)$.

56 Ejercicio. Sean $p \in [1, +\infty)$, $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Calcule el espectro del operador de multiplicación M_a definido en el Ejercicio 6.