Espacios de Hilbert

Problemas para examen

En todos los ejercicios de esta lista, si no está escrita otra suposición, suponemos que H es un espacio vectorial complejo con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En la definición del producto interno pedimos la propiedad lineal respecto al primer argumento y la propiedad lineal conjugada respecto al segundo argumento. Un *espacio de Hilbert* definimos como un espacio complejo con producto interno, completo respecto a la norma inducida (no pedimos que sea de dimensión infinita ni que sea separable). Hablando de *subespacios* de espacios de Hilbert, usamos esta palabra en el sentido puramente algebraico (el subespacio no necesariamento es cerrado).

Ya hemos estudiado propiedades elementales de formas sesquilineales y propiedades de espacios con producto interno.

Ejemplos de espacios de Hilbert

1 Ejercicio. Definir el producto interno canónico en $\ell^2(\mathbb{N})$ y explicar por qué $\ell^2(\mathbb{N})$ es un espacio de Hilbert.

2 Ejercicio. Demostrar que el espacio $c_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ de sucesiones de soporte finito no es completo.

3 Ejercicio. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Definir el producto interno canónico en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ y explicar por qué este espacio es un espacio de Hilbert.

Algunos otros espacios de Hilbert importantes que no consideramos en estos ejercicios: el espacio de Bergman de funciones analíticas en un dominio y cuadrado integrables, el espacio de Bargmann–Segal–Fock de funciones analíticas en el plano y cuadrado integrables con el peso gaussiano, el espacio de Hilbert asociado a un proceso estocástico (teoría de Karhunen–Loève). Los espacios mencionados son *espacios de Hilbert con núcleo reproductor*.

El elemento de norma mínima en un conjunto convexo cerrado no vacío

Suponemos que H es un espacio de Hilbert.

4 Ejercicio. Sea $\xi > 0$ y sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en H tales que $\|a_n\| \to \xi$, $\|b_n\| \to \xi$, y

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left\| \frac{a_n + b_n}{2} \right\| \geq \xi.$$

Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \|a_n - b_n\| = 0$. Usar la identidad de Apolonio.

5 Ejercicio. Sea X un subconjunto de H, cerrado, convexo y no vacío. Demostrar que existe un elemento x en X tal que para cada y en $X \setminus \{x\}$ se cumple la desigualdad $\|x\| < \|y\|$. Sugerencia: poner

$$\xi := d(X, 0_H) = \inf_{y\in X} \|y\|,$$

considerar una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H tal que $\|a_n\| \to \xi$, y demostrar que esta sucesión es de Cauchy. Usar la identidad de Apolonio.

6 Ejercicio. Sea S un subconjunto de H, cerrado, convexo y no vacío, y sea v un elemento de H. Demostrar que existe un elemento x en S tal que para cada y en $S \setminus \{x\}$ se cumple la desigualdad $\|x - v\| < \|y - v\|$.

La proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado

7 Ejercicio. Sea S un subespacio cerrado de H y sea $v \in H$. Demostrar que existe un único vector u en S tal que $v - u \in S^\perp$.

8 Ejercicio (propiedades de la proyección ortogonal)**.** Sea S un subespacio cerrado de H. Para cada v en H denotemos por $P_S(v)$ al vector u del ejercicio anterior. Demostrar las siguientes propiedades de la función P_S.

1. P_S es lineal.

2. $P_S \in \mathcal{B}(H)$ y $\|P_S\| \leq 1$.

3. $P_S^2 = P_S$.

4. $\langle P_S a, b\rangle = \langle a, P_S b\rangle$ para cada a, b en H.

5. La imagen de P_S es S.

6. El núcleo de P_S es $S^\perp$.

9 Ejercicio. Sea S un subespacio cerrado de H. Demostrar que

$$P_{S^\perp} = I - P_S.$$

Encontrar el núcleo y la imagen del operador $I - P_S$.

10 Ejercicio. Sean S_1, S_2 subespacios cerrados de H. Demostrar que

$$P_{S_1} P_{S_2} = P_{S_1 \cap S_2}.$$

11 Ejercicio. Sean S_1, S_2 subespacios cerrados de H. Demostrar que

$$P_{S_1} P_{S_2} = P_{S_2} P_{S_1}.$$

12 Ejercicio. Sean S_1, S_2 subespacios cerrados de H. Demostrar que

$$S_1 \le S_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad P_{S_1} P_{S_2} = P_{S_1}.$$

Propiedades principales de la operación “complemento ortogonal”

Algunas de las siguientes propiedades se cumplen en cualquier espacio con producto interno, pero algunas requieren la completez.

13 Ejercicio. Sea $A \subseteq H$ y sea $S \coloneqq \ell(A)$. Demostrar que $S^\perp = A^\perp$.

14 Ejercicio. Sea $X \subseteq H$. Demostrar que $X^\perp$ es un subespacio cerrado de H.

15 Ejercicio. Sea $X \subseteq H$. Demostrar que $X^\perp = (\mathrm{cl}(\ell(X)))^\perp$.

16 Ejercicio. Sea S un subespacio cerrado de H. Demostrar que $(S^\perp)^\perp = S$. Sugerencia: usar el resultado del Ejercicio 7.

17 Ejercicio. Sea $X \subseteq H$. Demostrar que $(X^\perp)^\perp = \operatorname{cl}(\ell(X))$.

18 Ejercicio. Sean $X, Y \subseteq H$ tales que $0_H \in X$, $0_H \in Y$. Demostrar que $(X+Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$.

Representación de funcionales lineales acotados en espacios de Hilbert

19 Ejercicio. Sea $a \in H$. Definimos $\varphi_a \colon H \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\varphi_a(x) \coloneqq \langle x, a \rangle.$$

Demostrar que $\varphi_a \in H^*$ y que $\|\varphi_a\| = \|a\|$.

En los siguientes cuatro ejercicios usamos la misma notación φ_a.

20 Ejercicio. Sea $a \in H$. Demostrar que

$$a \perp \ker(\varphi_a), \qquad \varphi_a(a) = \|a\|^2.$$

21 Ejercicio. Sea $\psi \in H^*$, $\psi \neq 0_{H\to\mathbb{C}}$, y sea $a \in H$ tal que

$$a \perp \ker(\psi), \qquad \psi(a) = \|a\|^2.$$

Demostrar que $\psi = \varphi_a$.

22 Ejercicio (teorema de Fréchet–Riesz sobre la representación de funcionales lineales acotados en espacios de Hilbert)**.** Sea $\psi \in H^*$. Demostrar que existe un único vector a en H tal que $\psi = \varphi_a$.

23 Ejercicio (la correspondencia canónica entre los vectores y los funcionales lineales acotados en espacios de Hilbert)**.** Definimos $\Phi \colon H \to H^*$ mediante la regla $\Phi(a) \coloneqq \varphi_a$. Demostrar que la función Φ es biyectiva, lineal conjugada e isométrica.

24 Ejercicio (el producto interno canónico en el espacio dual del espacio de Hilbert)**.** Demostrar que la regla

$$\langle f, g\rangle_{H^*} := \Phi^{-1}(g), \Phi^{-1}(f)\rangle$$

define un producto interno en H^*. Demostrar que la norma inducida por este producto interno coincide con la norma usual de H^*:

$$\langle f, f\rangle_{H^*} = \|f\|_{H^*}^2.$$

Concluir que H^* con este producto interno es un espacio de Hilbert.

25 Ejercicio (la descripción del espacio bidual de un espacio de Hilbert)**.** Definimos $\Lambda\colon H \to H^{**}$ de la siguiente manera. Para cada a en H y cada ψ en H^*,

$$(\Lambda(a))(\psi) := \psi(a).$$

Ya sabemos para cualquier espacio de Banach, la función Λ es lineal e isométrica, por eso inyectiva. Demostrar que en nuestro caso, para los espacios de Hilbert,

$$\Lambda = \Phi_{H^*}\Phi_H.$$

Concluir que Λ es sobre. Concluir que Λ es un isomorfismo isométrico. Por definición, esto significa que H es reflexivo.

Sumas de sucesiones ortogonales de vectores

Estamos suponiendo que H es un espacio de Hilbert.

26 Ejercicio (convergencia de series de vectores ortogonales)**.** Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortogonal en H. Demostrar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge si, y solo si,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < +\infty.$$

Sugerencias. Denotemos por s_m a la m-ésima suma parcial. En la parte de suficiencia demostrar que la sucesión $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. En la parte de necesidad demostrar que

$$\|s_m\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^2,$$

y pasar al límite cuando $m \to \infty$.

27 Ejercicio (el teorema de Pitágoras para series de vectores ortogonales)**.** Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortogonal en H tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < +\infty,$$

y sea

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Demostrar que

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Proyección ortogonal al subespacio generado por una lista ortogonal de vectores, repaso

28 Ejercicio. Sean $v \in H$, $m \in \mathbb{N}$ y sea $a_1, \ldots, a_m$ una lista ortogonal de vectores no nulos en H. Pongamos $S = \ell(a_1, \ldots, a_m)$. Demostar que existe un único vector u en S tal que $v - u \in\ S^{\perp}$. Mostrar que

$$u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, a_k\rangle}{\|a_k\|^2}\, a_k.$$

29 Ejercicio. En la notación del Ejercicio 28, pongamos $w \coloneqq v - u$. Notamos que

$$v = u + w = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, a_k\rangle}{\|a_k\|^2}\, a_k + w.$$

Demostrar que

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{|\langle v, a_k\rangle|^2}{\|a_k\|^2} + \|w\|^2.$$

30 Ejercicio. Simplificar las fórmulas de los ejercicios anteriores en el caso cuando la lista $(a_1, \ldots, a_m)$ es ortonormal.

31 Ejercicio (la desigualdad de Bessel finita)**.** Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ una lista ortonormal en H y sea $v \in H$. Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k\rangle|^2 \le \|v\|^2.$$

32 Ejercicio (el criterio de pertenencia de un vector al subespacio generado por una lista ortonormal de vectores)**.** Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$. Pongamos

$$S \coloneqq \ell(a_1, \ldots, a_m).$$

Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes entre si:

(a) $v \in S$;

(b) $v = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle\, a_k$;

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} |\langle v, a_k \rangle|^2 = \|v\|^2$.

Sucesiones ortonormales de vectores

33 Ejercicio (la desigualdad de Bessel, repaso)**.** Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$. Demostrar que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle v, a_k \rangle|^2 \le \|v\|^2.$$

Sugerencia: escribir la desigualdad de Bessel finita y pasar al límite.

34 Ejercicio. Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$. Mostrar que la siguiente serie converge en H:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \langle v, a_k \rangle a_k.$$

35 Ejercicio (la proyección ortogonal del vector sobre el subespacio cerrado generado por una sucesión ortonormal)**.** Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$. Denotemos por S a la cerradura del subespacio vectorial generado por $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$:

$$S \coloneqq \operatorname{cl}(\ell(\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\})).$$

Pongamos

$$u \coloneqq \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle v, a_k \rangle a_k, \qquad w \coloneqq v - u.$$

Mostrar que $u \in S$ y $w \in S^\perp$. Sugerencias. Para cada m en $\mathbb{N}$ poner

$$t_m \coloneqq \sum_{k=1}^{m} \langle v, a_k \rangle a_k.$$

Mostrar que $\langle t_m, a_j \rangle = 0$ para $m \geq j$. Pasar al límite cuando $m \to \infty$.

36 Ejercicio (el criterio de pertenencia del vector al subespacio cerrado generado por una sucesión ortonormal)**.** Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H y sea $v \in H$. Denotemos por S a la cerradura del subespacio vectorial generado por $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$:

$$S \coloneqq \mathrm{cl}(\ell(\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\})).$$

Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $v \in S$.

(b) Existe una sucesión $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}$ tal que $v = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$.

(c) $v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle a_k$.

(d) $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k \rangle|^2$.

Bases ortonormales

37 Ejercicio. Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H. Denotemos por S a la cerradura del subespacio vectorial generado por $\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$:

$$S \coloneqq \mathrm{cl}(\ell(\{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\})).$$

Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $S = H$.

(b) Para cada v en H, existe una sucesión $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{C}$ tal que $v = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$.

(c) Para cada v en H, $v = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle v, a_k\rangle a_k$.

(d) Para cada v en H, $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, a_k\rangle|^2$.

(e) Para cada v en H, si $\langle v, a_k\rangle = 0$ para cada k en $\mathbb{N}$, entonces $v = \{0_H\}$.

Decimos que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una *base ortogonal* (o *base de Hilbert*) de H si se cumplen estas condiciones.

38 Ejercicio (el teorema de Riesz–Fréchet para el espacio de Hilbert con una base ortonormal dada)**.** Sean $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H y $\psi \in H^*$. Pongamos

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\psi(a_k)} a_k.$$

Demostrar que $\psi(f) = \langle f, g\rangle$ para cada f en H.

39 Ejercicio. Supongamos que H es un espacio de Hilbert separable y D es un subconjunto numerable denso de H. Mostrar cómo construir una base ortonormal en H usando el conjunto D y el proceso de ortogonalización de Gram y Schmidt.

40 Ejercicio. Sea H un espacio de Hilbert y sea $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H. Supongamos que S_1 y S_2 son dos subespacios cerrados de H, $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{N}$, $(b_k)_{k\in J_1}$ es una base ortonormal de S_1 y $(b_k)_{k\in J_2}$ es una base ortonormal de S_2. Mostrar que $(b_k)_{k\in J_1\cap J_2}$ es una base ortonormal de $S_1 \cap S_2$.

Ejemplos de bases ortogonales

41 Ejercicio (la base canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$)**.** Demostrar que $(e_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{N})$.

42 Ejercicio (ortogonalidad de los monomios trigonométricos)**.** Para cada n en $\mathbb{N}_0$ definimos φ_n mediante la regla

$$\varphi_n(x) := \mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,x}.$$

Demostrar que $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión ortonormal en $L^2([0, 2\pi), \frac{1}{2\pi}\mu)$, donde μ es la medida de Lebesgue. Tarea adicional: demostrar que $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ es una base ortonormal de este espacio.

43 Ejercicio (ortogonalidad de los polinomios de Laguerre)**.** Para cada n en $\mathbb{N}_0$ definimos L_n mediante la fórmula de Rodrigues:

$$L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\mathrm{e}^{-x}\; x^n\right).$$

Demostrar que $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión ortogonal en $L^2((0,+\infty),\nu)$, donde $\mathrm{d}\nu(x) = \mathrm{e}^{-x}\;\mathrm{d}\mu(x)$ y μ es la medida de Lebesgue. Sugerencia: usando la integración por partes demostrar que $\langle L_n, f\rangle_\nu = 0$ para cualquier polinomio f de grado $< n$. Tarea adicional: demostrar que los polinomios de Laguerre forman una base ortogonal de este espacio.

44 Ejercicio (ortogonalidad de los polinomios de Hermite)**.** Para cada n en $\mathbb{N}_0$ definimos H_n mediante la fórmula de Rodrigues:

$$H_n(x) = (-1)^n\, \mathrm{e}^{x^2}\; \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\mathrm{e}^{-x^2}\right).$$

Demostrar que $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión ortogonal en el espacio $L^2(\mathbb{R},\nu)$, donde $\mathrm{d}\nu(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\;\mathrm{d}\mu(x)$ y μ es la medida de Lebesgue. Tarea adicional: demostrar que $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ es una base ortogonal de este espacio.

45 Ejercicio. Definimos los polinomios de Legendre mediante la fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(x^2 - 1\right)^n.$$

Demostrar que $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión ortogonal en el espacio $L^2([-1,1])$. Tarea adicional: demostrar que $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ es una base ortogonal de este espacio.

Isomorfismos de espacios de Hilbert

46 Ejercicio. Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal en H. Definimos $U\colon H \to \ell^2(\mathbb{N})$ y $V\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to H$ mediante las siguientes reglas:

$$Uf \coloneqq (\langle f, a_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}, \qquad V(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} x_k a_k.$$

Mostrar que estas definiciones son consistentes. Demostrar que $UV = I_{\ell^2(\mathbb{N})}$, $VU = I_H$. Demostrar que U y V son isomorfismos isométricos.

47 Ejercicio. Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert de dimensión infinita y separables. Demostrar H_1 y H_2 son isométricamente isomorfos.

Sumas de espacios de Hilbert

48 Ejercicio (la suma de dos espacios de Hilbert)**.** Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert. Denotamos por $H_1 \otimes H_2$ el conjunto $H_1 \times H_2$ con las operaciones lineales por componentes. Ya sabemos que es un espacio vectorial. Mostrar que la función

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle \coloneqq \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} + \langle x_2, y_2 \rangle_{H_2}$$

es un producto interno. Mostrar que $H_1 \otimes H_2$ con este producto interno es un espacio de Hilbert.

49 Ejercicio (la suma de una sucesión de espacios de Hilbert)**.** Sea $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios de Hilbert. Denotemos por S al conjunto de las sucesiones $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $a_k \in H_k$ para cada k en $\mathbb{N}$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|_{H_k}^2 < +\infty.$$

Mostrar S se puede dotar de operaciones lineales por componentes, que S es un espacio vectorial complejo, que la función

$$\langle a, b \rangle \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k, b_k \rangle_{H_k}$$

está bien definida y es un producto interno en S, y que S es un espacio de Hilbert.