Series de Fourier y coeficientes de Fourier

Problemas para examen

En esta unidad del curso estudiamos propiedades básicas de las transformadas de Fourier sobre los grupos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$.

Grupo $\mathbb{R}/(\boldsymbol{T}\mathbb{Z})$

En esta subsección fijamos un número real positivo T y estudiamos el grupo $\mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$. Luego vamos a aplicar estos resultados en el caso particular cuando $T = 2\pi$.

1. La suma de dos conjuntos de números reales. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Recuerde la definición del conjunto $A + B$.

2. La suma de un número real y un conjunto de números reales. Sean $a \in \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$. Entonces $a + B$, por definición, es lo mismo que $\{a\} + B$. Aplique la definición anterior y simplifíquela para este caso particular.

3. Subgrupo $\boldsymbol{T}\mathbb{Z}$ del grupo $\mathbb{R}$. Demuestre que el conjunto $T\mathbb{Z}$ es un subgrupo del grupo $\mathbb{R}$.

4. Congruencia módulo $\boldsymbol{T}$. Defina la relación de congruencia módulo T en $\mathbb{R}$ y demuestre que es una relación de equivalencia.

5. La clase de congruencia módulo $\boldsymbol{T}$ de un número real. Sea $x \in \mathbb{R}$. Verifique que la clase de congruencia módulo T del número x es el conjunto

$$x + T\mathbb{Z}.$$

6. El conjunto de las clases de congruencia módulo $\boldsymbol{T}$. Denotamos por $\mathbb{R}_T$ el conjunto de las clases de equivalencia considerada en el problema anterior.

7. Adición en $\mathbb{R}_{\boldsymbol{T}}$. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$(x + T\mathbb{Z}) + (y + T\mathbb{Z}) = (x + y) + T\mathbb{Z}.$$

8. $\mathbb{R}_{\boldsymbol{T}}$ como un grupo. Explique cómo se define la operación de adición en $\mathbb{R}_T$ y demuestre que $\mathbb{R}_T$ es un grupo abeliano.

9. Propiedades importantes de la función exponencial. En este tema usamos sin demostración las siguientes propiedades conocidas de la función exponencial:

1. $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^w$ para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$.

2. $\overline{\mathrm{e}^{z}} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$ para cualquier z en $\mathbb{C}$.

3. Dado $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{e}^{z} = w$.

4. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{e}^{z} = 1$. Entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = 2\pi k\,\mathrm{i}$.

10. Isomorfismo entre $\mathbb{R}_T$ y $\mathbb{T}$. Consideramos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ definida mediante la regla

$$f(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}.$$

Usando propiedades conocidas de la función exponencial demuestre que f es un epimorfismo de grupos, esto es, f es una función suprayectiva y

$$f(x + y) = f(x)f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Halle el núcleo de f. Con ayuda del primer teorema de isomorfismos muestre que $\mathbb{R}_T$ es isomorfo a $\mathbb{T}$. Notamos que el resultado es el mismo para todo $T > 0$, así que los grupos $\mathbb{R}_T$ correspondientes de a valores diferentes de T, son isomorfos entre si.

Descripción de los caracteres del grupo $\mathbb{Z}$

11. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$, y sea $k \in \mathbb{Z}$. Muestre que

$$\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,y}.$$

12. Caracter del grupo $\mathbb{Z}$ asociado a un elemento de $\mathbb{R}_{2\pi}$. Sea $x \in \mathbb{R}$. Definamos $\psi_{x+2\pi\mathbb{Z}}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ mediante la regla

$$\psi_{x+2\pi\mathbb{Z}}(k) := \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}.$$

El ejercicio anterior muestra que esta definición es correcta, es decir, el lado derecho no depende de la elección del representante en la clase de equivalencia. Muestre que $\psi_{x+2\pi\mathbb{Z}}$ es un homomorfismo de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{T}$, esto es,

$$\psi_{x+2\pi\mathbb{Z}}(j + k) = \psi_{x+2\pi\mathbb{Z}}(j)\psi_{x+2\pi\mathbb{Z}}(k)$$

para cualesquiera j y k en $\mathbb{Z}$. Además, es obvio que la función $\psi_{x+2\pi\mathbb{Z}}$ es continua, porque la topología de $\mathbb{Z}$ es discreta.

13. Descripción de los caracteres del grupo $\mathbb{Z}$. Definamos $\Psi\colon \mathbb{R}_{2\pi} \to \widehat{\mathbb{Z}}$ mediante la regla

$$\Psi(A) := \psi_A \qquad (A \in \mathbb{R}_{2\pi}),$$

o sea

$$\Psi(x + 2\pi\mathbb{Z})(k) := \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} \qquad (x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}).$$

Muestre que Ψ es un isomorfismo de grupos. La parte más interesante es demostrar que Ψ es suprayectivo, esto es, cualquier caracter del grupo $\mathbb{Z}$ se puede escribir como $\psi_{x+2\pi\mathbb{Z}}$ para algún x en $\mathbb{R}$. En realidad, además de ser homomorfismo, Ψ también es homeomorfismo, pero no lo demostramos en este curso porque no definimos la topología en el grupo dual.

Algunas clases de funciones 2π-periódicas

14. Las clases de funciones 2π-periódicas y p-integrables. Sea $p \in [1, +\infty)$. Denotamos por $L^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ a la clase de las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son 2π-periódicas, Lebesgue-medibles y tales que la p-ésima potencia de su valor absoluto es Lebesgue-integrable sobre el intervalo $[0, 2\pi)$:

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx < +\infty.$$

La (semi)norma en $L^p_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ se define mediante la regla

$$\|f\|_{p,\text{per}} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

En vez de $\|f\|_{p,\text{per}}$ escribiremos simplemente $\|f\|_p$.

15. Funciones 2π-periódicas esencialmente acotadas. Denotamos por $L^\infty_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ al conjunto de las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son 2π-periódicas, Lebesgue-medibles y esencialmente acotadas. La (semi)norma en $L^\infty_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ se define como el supremo esencial del valor absoluto de la función dada.

16. Relación entre varias clases de funciones 2π-periódicas. Demuestre que

$$C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \subsetneq L^\infty_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \subsetneq L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \subsetneq L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}).$$

Funciones básicas de Fourier

Para cada k en $\mathbb{Z}$, definamos $\varphi_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ mediante la regla

$$\varphi_k(x) := \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}.$$

17. Las funciones básicas de Fourier son 2π-periódicas. Sea $k \in \mathbb{Z}$. Muestre que φ_k es 2π-periódica:

$$\varphi_k(x + 2\pi) = \varphi_k(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

18. Período positivo mínimo de la función básica de Fourier. La función φ_0 es constante, por eso cualquier número real es su período. Sea $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Muestre que la función φ_k es $\frac{2\pi}{|k|}$-periódica. Determine en qué puntos la función φ_k toma valor 1. Demuestre que si $0 < T < \frac{2\pi}{|k|}$, entonces T no es período de φ_k. Haga una conclusión sobre el período positivo mínimo de la función φ_k.

19. Funciones básicas de Fourier como caracteres del grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$ (problema optativo). Muestre que las funciones φ_k se pueden tratar como caracteres del grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$. Más aún, después de estudiar los caracteres del grupo $\mathbb{R}$, es fácil demostrar que cualquier caracter del grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$ es de la forma φ_k para algún k en $\mathbb{Z}$, y que la correspondencia $k \mapsto \varphi_k$ es un isomorfismo entre $\mathbb{Z}$ y $\widehat{\mathbb{R}_{2\pi}}$.

Coeficientes de Fourier de funciones 2π-periódicas

20. Definición de los coeficientes de Fourier. Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Definamos $\widehat{f}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\, dx.$$

21. Ejemplo. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la función 2π-periódica tal que $f(x) = x^2$ para cualquier x en $[-\pi, \pi]$. Deduzca una fórmula para $\widehat{f}_k$.

22. Ejemplo. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la función 2π-periódica tal que $f(x) = |x|$ para cualquier x en $[-\pi, \pi]$. Deduzca una fórmula para $\widehat{f}_k$.

23. Ejemplo. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la función 2π-periódica tal que $f(x) = x$ para cualquier x en $[-\pi, \pi)$. Deduzca una fórmula para $\widehat{f}_k$.

24. Aproximación de los coeficientes de Fourier por medio de la transformada discreta de Fourier. Sea f una función continuamente derivable en $\mathbb{R}$ y 2π-periódica, y sea $j \in \mathbb{Z}$. Pongamos

$$b_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2j\pi\,\mathrm{i}}{n}}\, f\left(\frac{2j\pi}{n}\right). \tag{1}$$

Demuestre que

$$\left|\widehat{f}_j - b_j\right| \leqslant \frac{C|j|}{n} \sup_{x \in [0,2\pi]} |f'(x)|,$$

donde C es una constante.

25. Programación: aproximación de los coeficientes de Fourier por medio de la transformada discreta de Fourier. En algún lenguaje de programación escriba una función de dos argumentos f y m (se supone que f es una función, m es un número entero positivo) que calcule y devuelva una aproximación de los coeficientes de Fourier $\widehat{f}_{-m+1}, \ldots, \widehat{f}_{m-1}$. Se recomienda poner $n = m^2$, calcular los valores de la función f en los puntos $2k\pi/n$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, y calcular las expresiones (1) usando la transformada rápida de Fourier. Se puede regresar una matriz de dos columnas:

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_0 \\ b_1 & b_{-1} \\ \vdots & \vdots \\ b_{m-1} & b_{-m+1} \end{bmatrix}.$$

26. Programación: pruebas del cálculo de los coeficientes de Fourier. En algún lenguaje de programación escriba una función de un argumento m que calcule y devuelva el número

$$\max_{0 \leqslant j \leqslant m-1} |\widehat{f}_j - b_j|,$$

donde f es la función del Problema 22, $\widehat{f}_0, \ldots, \widehat{f}_{m-1}$ son sus coeficientes de Fourier calculados por la fórmula exacta (deducida en el Problema 22), y $b_0, \ldots, b_{m-1}$ son los números que regresa la función del Problema 25.

Series de Fourier absolutamente convergentes

27. Definición de la serie de Fourier asociada a una sucesión absolutamente sumable de números complejos. Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$, esto es, $a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| < +\infty.$$

Definimos la función $\breve{a}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\breve{a}(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

Exprese $\breve{a}$ en términos de las funciones φ_k. Muestre que la serie en el lado derecho de (2) converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

28. Continuidad y periodicidad de la serie de Fourier asociada a una sucesión absolutamente sumable de números complejos. Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Muestre que $\breve{a} \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

29. Coeficientes de Fourier de la serie de Fourier asociada a una sucesión absolutamente sumable. Sean $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y $f = \breve{a}$. Demuestre que $\widehat{f} = a$.

30. Identidad de Parseval para series de Fourier absolutamente sumables. Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\breve{a}(x)|^2 \, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2.$$

31. El núcleo de Poisson. Sea $r \in (0,1)$. Consideremos la sucesión a definida mediante la regla

$$a_k = r^{|k|} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

La serie de Fourier correspondiente se conoce como el *núcleo de Poisson*:

$$P_r(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} \, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}.$$

Deduzca una fórmula explícita para $P_r(x)$ usando la fórmula para la progresión geométrica.

32. Programación: aproximación de las series de Fourier usando la transformada rápida de Fourier. En algún lenguaje de programación escriba una función que aproxime los valores de una suma finita de Fourier dada por sus coeficientes, en los puntos una malla uniforme del segmento $[0, 2\pi]$. Se supone que la función tiene un argumento, la matriz de dos columnas

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_0 \\ a_1 & a_{-1} \\ \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{-n+1} \end{bmatrix}.$$

Denotemos por f a la suma finita de Fourier asociada a estos coeficientes:

$$f(x) := \sum_{j=-n+1}^{n-1} a_j \, \mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,x}.$$

La función tiene que calcular y devolver el vector v de los valores de f en los puntos $\frac{2k\pi}{n}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$:

$$v = \left[v_k\right]_{k=0}^{n-1} = \left[f\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right]_{k=0}^{n-1}.$$

33. Programación: prueba numérica de la aproximación del núcleo de Poisson por sumas finitas de Fourier. En algún lenguaje de programación escriba una función de dos argumentos r y n (se supone que $r \in (0,1)$ y $n \in \{1, 2, \ldots\}$) que calcule y devuelva el número

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left| v_k - P_r\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right|,$$

donde P_r se calcula por la fórmula exacta deducida en el Problema 31, y los valores aproximados v_k están dados por la función del Problema 32 aplicada a la matriz de los números $a_k = r^{|k|}$.

Dos teoremas principales sobre los coeficientes de Fourier de funciones periódicas Lebesgue-integrables

34. Teorema sobre la propiedad inyectiva de los coeficientes de Fourier. Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que la sucesión $\widehat{f}$ es nula. Demuestre que la función f vale cero casi en todas partes.

35. Lema de Riemann–Lebesgue. Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} |f_n| = 0.$$

Se recomienda demostrarlo primero para la función característica de un intervalo, luego para funciones escalonadas, y luego para el caso general.

Series de Fourier cuadrado sumables

36. Ortonormalidad de las funciones básicas de Fourier. Sean $p, q \in \mathbb{Z}$. Verifique que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\varphi_p(x)}\, \varphi_q(x)\, dx = \delta_{p,q}.$$

37. Teorema de Riesz y Fischer sobre la serie de Fourier asociada a una sucesión cuadrado sumable. Sea $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Demuestre que existe una única función f de clase $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = a$. Indicación. La unicidad se sigue del Problema 34. Para construir la función f, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ denotemos por S_n a la suma parcial de Fourier

$$S_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} a_k\, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}.$$

Demuestre que la sucesión $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. El espacio $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ es completo, por eso existe una función f en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que $\|S_n - f\|_2 \to 0$. Luego demuestre que $\widehat{f} = a$.

38. La suma parcial de Fourier como la mejor aproximación de una función dada por polinomios trigonométricos. Sean $f \in L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}_0$,

$$(S_n f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k\, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{3}$$

Demuestre que para cualquier función g de la forma

$$g(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k\, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x},$$

donde $a_{-n}, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, se cumple la desigualdad

$$\|f - g\|_2 \geqslant \|f - S_n f\|_2.$$

Más aún, se cumple la fórmula

$$\|f - S_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}_k|^2.$$

39. Convergencia de series de Fourier de funciones cuadrado integrables. Sea $f \in L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ definimos $S_n f$ mediante la fórmula (3). Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_2 \to 0.$$

40. La identidad de Parseval. Sea $f \in L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2.$$

Convolución periódica

41. Sean $f, g \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Escriba la definición de la función $f * g$.

42. Sean $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$. Demuestre que

$$f * \varphi_k = \widehat{f}_k \varphi_k.$$

Convergencia puntual de las series de Fourier

43. Núcleo de Dirichlet. Para cada n en $\mathbb{N}_0$ denotemos por D_n a la función

$$D_n = \sum_{k=-n}^{n} \varphi_k.$$

Notamos que D_n es un polinomio trigonométrico y que $D_n \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

44. El núcleo de Dirichlet en términos de cos. Demuestre que

$$D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

45. Los valores del núcleo de Dirichlet en los múltiplos de 2π. Sean $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$. Calcule $D_n(2m\pi)$.

46. El núcleo de Dirichlet como cierto cociente de sen. Sean $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}\backslash(2\pi\mathbb{Z})$. Demuestre que

$$D_n(x) = \frac{\operatorname{sen}\frac{(2n+1)x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

47. Las sumas parciales de Fourier en términos del núcleo de Dirichlet. Sean $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}_0$. Denotamos por $S_n f$ a la función

$$(S_n f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k \, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}\,.$$

Demuestre que

$$S_n f = D_n * f.$$

48. Algunas estimaciones para las funciones cos y sen. Demuestre las siguientes desigualdades:

$$
\begin{aligned}
&|\cos(x)| \leqslant 1, \qquad |\operatorname{sen}(x)| \leqslant 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),\\
&|\operatorname{sen}(x)| \leqslant |x| \qquad (x \in \mathbb{R}),\\
&\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right),\\
&x\cos(x) - \operatorname{sen}(x) \geqslant 0 \qquad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right),\\
&|\operatorname{sen}(x)| \geqslant \frac{2}{\pi}|x| \qquad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right),\\
&\operatorname{sen}(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6} \qquad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right),\\
&|x - \operatorname{sen}(x)| \leqslant \frac{|x|^3}{6} \qquad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right),\\
&\left|\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{\pi^2}{24} \qquad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right).
\end{aligned}
$$

49. Criterio de convergencia de la serie de Fourier en un punto. Enuncie y demuestre el criterio correspondiente.

50. Teorema de Dini. Enuncie y demuestre el teorema de Dini que da una condición suficiente para la convergencia la serie de Fourier en un punto dado.

51. Convergencia puntual de las series de Fourier para funciones Hölder-continuas. Sea $\alpha \in (0, 1]$. Escriba la definición de funciones Hölder-continuas con exponente α. Sea f una función de clase $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y Hölder-continua con exponente α. Demuestre que $S_n f$ converge a f en cada punto.

Convergencia uniforme de las sumas promediadas de Fourier

52. Núcleo de Fejér. Sea $m \in \mathbb{N}$. Pongamos

$$\Phi_m = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} D_n.$$

Demuestre que para cada x en $\mathbb{R} \backslash (2\pi\mathbb{Z})$,

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{m} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{mx}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \right)^2.$$

53. Sumas promediadas de Fourier. Sean $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$. Pongamos

$$\widetilde{S}_m f = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_n f.$$

Demuestre que $\widetilde{S}_m f = \Phi_m * f$.

54. Núcleos aproximativos. Enuncie la definición de núcleo aproximativo.

55. El núcleo de Fejér como un núcleo aproximativo. Demuestre que la sucesión $(\Phi_m)_{m=0}^{\infty}$ es un núcleo aproximativo.

56. Teorema sobre los núcleos aproximativos y la convergencia uniforme. Sea $(K_m)_{m=0}^{\infty}$ un núcleo aproximativo y sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |(K_m * f)(x) - f(x)| = 0.$$

57. Aproximación uniforme de funciones continuas 2π-periódicas por polinomios trigonométricos. Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. De los resultados anteriores concluya que la sucesión $(\widetilde{S}_m f)_{m=1}^{\infty}$ converge a la función f uniformemente.