La variación total de una función
(un tema de análisis real)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

5 de noviembre de 2021

Objetivos

Dada una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definir su

- variación total $\operatorname{Var}_a^b(f)$,
- variación positiva $\operatorname{PVar}_a^b(f)$,
- variación negativa $\operatorname{NVar}_a^b(f)$.

Demostrar que

$$\operatorname{Var}_a^b(f) = \operatorname{PVar}_a^b(f) + \operatorname{NVar}_a^b(f).$$

Particiones de un intervalo

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se dice que τ es una partición del intervalo $[a, b]$ si τ es una tupla de la forma

$$\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n),$$

donde

$$a = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_n = b.$$

Particiones de un intervalo

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se dice que τ es una partición del intervalo $[a, b]$ si τ es una tupla de la forma

$$\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n),$$

donde

$$a = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_n = b.$$

$\mathcal{P}(a, b) :=$ el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$.

Particiones de un intervalo

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se dice que τ es una partición del intervalo $[a, b]$ si τ es una tupla de la forma

$$\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n),$$

donde

$$a = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_n = b.$$

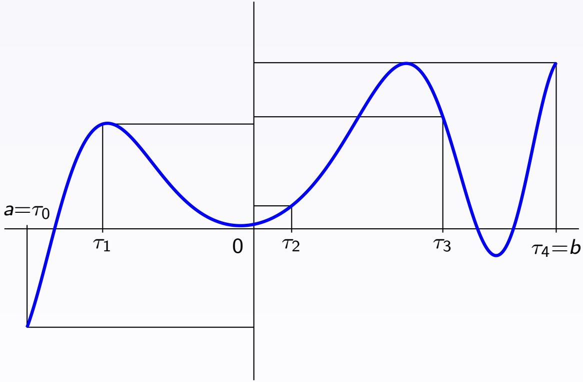
$\mathcal{P}(a, b) :=$ el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$.

Ejemplo.

$$(-3,\ 1, \sqrt{2}, 5) \in \mathcal{P}(-3, 5), \qquad (-3, -2, 0, 10^{-100}, \pi, 5) \in \mathcal{P}(-3, 5).$$

“La variación de una función asociada a una partición”

$$S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) := \sum_{j=1}^{n} |f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})|.$$

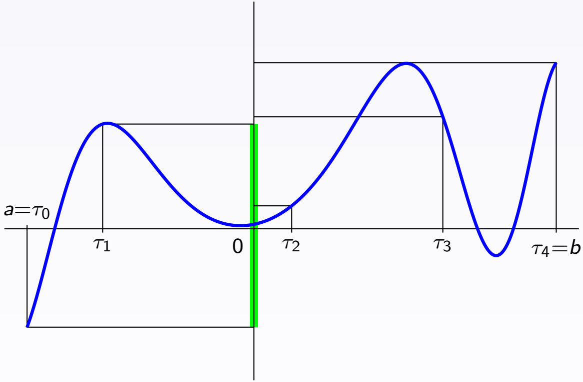


$$\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4).$$

$$S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) =$$

"La variación de una función asociada a una partición"

$$S_{\text{abs}}(f,\tau) := \sum_{j=1}^{n} |f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})|.$$

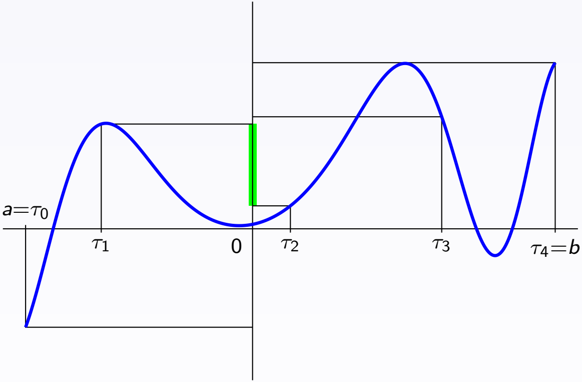


$$\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4).$$

$$S_{\text{abs}}(f,\tau) = |f(\tau_1) - f(\tau_0)|$$

“La variación de una función asociada a una partición”

$$S_{\text{abs}}(f,\tau) := \sum_{j=1}^{n} |f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})|.$$

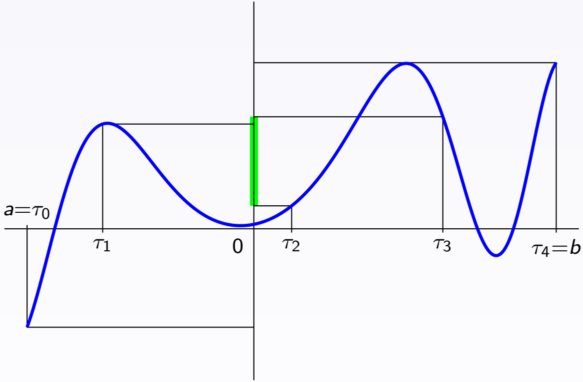


$$\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4).$$

$$S_{\text{abs}}(f,\tau) = |f(\tau_1) - f(\tau_0)| + |f(\tau_2) - f(\tau_1)|$$

“La variación de una función asociada a una partición”

$$S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) := \sum_{j=1}^{n} |f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})|.$$

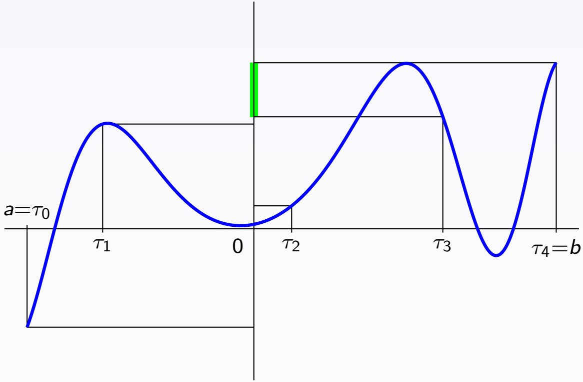


$$\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4).$$

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) &= |f(\tau_1) - f(\tau_0)| \\ &\quad + |f(\tau_2) - f(\tau_1)| \\ &\quad + |f(\tau_3) - f(\tau_2)| \end{aligned}$$

“La variación de una función asociada a una partición”

$$S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) := \sum_{j=1}^{n} |f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})|.$$



$$\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4).$$

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) = & \, |f(\tau_1) - f(\tau_0)| \\ & + |f(\tau_2) - f(\tau_1)| \\ & + |f(\tau_3) - f(\tau_2)| \\ & + |f(\tau_4) - f(\tau_3)|. \end{aligned}$$

La variación total de una función en un intervalo

$$\mathrm{Var}_a^b(f) := \sup_{\tau \in \mathcal{P}(a,b)} S_{\mathrm{abs}}(f,\tau),$$

esto es,

$$\mathrm{Var}_a^b(f) := \sup_{(\tau_0,\ldots,\tau_n) \in \mathcal{P}(a,b)} \sum_{j=1}^{n} S_{\mathrm{abs}}(f,\tau).$$

Proposición (la variación total de una función Lipschitz continua)

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz continua con coeficiente L:

$$\forall x, y \in [a,b] \qquad |f(x) - f(y)| \le L|x - y|.$$

Entonces

$$\operatorname{Var}_a^b(f) \le L(b - a).$$

Proposición (la variación total de una función Lipschitz continua)

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz continua con coeficiente L:

$$\forall x, y \in [a,b] \qquad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Entonces

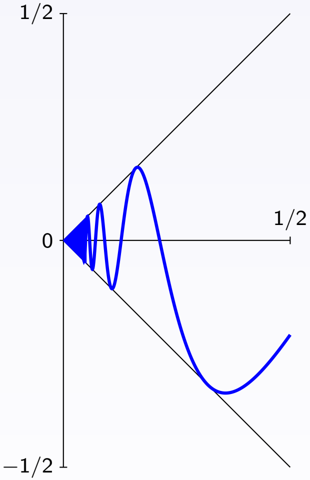
$$\mathrm{Var}_a^b(f) \leq L(b - a).$$

Demostración. Para cada $\tau = (\tau_0, \ldots, \tau_n)$ en $\mathcal{P}(a,b)$,

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) &= \sum_{j=1}^{n} |f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^{n} L(\tau_j - \tau_{j-1}) \\ &= L \sum_{j=1}^{n} (\tau_j - \tau_{j-1}) = L(b - a). \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo de una función continua con variación total infinita



$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R},$$

$$f(x) := \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & x \in (0,1]; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ejemplo de una función continua con variación total infinita

$$f(x) := \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x \in (0,1]; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Para cada n en $\mathbb{N}$, consideremos la partición

$$\tau^{(n)} := \left(0, \quad \frac{1}{n\pi}, \quad \frac{1}{(n-1)\pi}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\pi}, \quad 1\right).$$

$$S_{\mathrm{abs}}(f,\tau^{(n)}) = \sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)\pi} - \frac{(-1)^j}{j\pi}\right| = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\pi(j+1)} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j\pi} \ge \frac{2}{\pi}\sum_{j=2}^{n-1}\frac{1}{j}.$$

Luego

$$\mathrm{Var}_a^b(f) \ge \sup_{n\in\mathbb{N}} S_{\mathrm{abs}}(f,\tau^{(n)}) \ge \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{2}{\pi}\sum_{j=2}^{n-1}\frac{1}{j}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j} = +\infty.$$

La parte positiva y la parte negativa de un número real (repaso)

Para cada t en $\mathbb{R}$,

$$\operatorname{Pos}(t) := \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \qquad \operatorname{Neg}(t) := \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ -t, & t < 0. \end{cases}$$

La parte positiva y la parte negativa de un número real (repaso)

Para cada t en $\mathbb{R}$,

$$\operatorname{Pos}(t) := \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \qquad \operatorname{Neg}(t) := \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ -t, & t < 0. \end{cases}$$

Propiedades:

$$\operatorname{Pos}(t) - \operatorname{Neg}(t) = t, \qquad \operatorname{Pos}(t) + \operatorname{Neg}(t) = |t|,$$

$$0 \leq \operatorname{Pos}(t) \leq |t|, \qquad 0 \leq \operatorname{Neg}(t) \leq |t|.$$

La parte positiva y la parte negativa de un número real (repaso)

Para cada t en $\mathbb{R}$,

$$\operatorname{Pos}(t) := \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \qquad \operatorname{Neg}(t) := \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ -t, & t < 0. \end{cases}$$

Propiedades:

$$\operatorname{Pos}(t) - \operatorname{Neg}(t) = t, \qquad \operatorname{Pos}(t) + \operatorname{Neg}(t) = |t|,$$

$$0 \leq \operatorname{Pos}(t) \leq |t|, \qquad 0 \leq \operatorname{Neg}(t) \leq |t|.$$

Notemos que *la parte negativa* de t es un número no negativo.

La variación positiva y la variación negativa asociadas a una función y una partición

$$S_+(f,\tau) := \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Pos}(f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})), \qquad S_-(f,\tau) := \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Neg}(f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})).$$

La variación positiva y la variación negativa asociadas a una función y una partición

$$S_+(f,\tau) := \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Pos}(f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})), \qquad S_-(f,\tau) := \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Neg}(f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})).$$

De las propiedades de Pos y Neg obtenemos

$$S_+(f,\tau) - S_-(f,\tau) = f(b) - f(a), \qquad S_+(f,\tau) + S_-(f,\tau) = S_{\mathrm{abs}}(f,\tau),$$

$$S_+(f,\tau) \le S_{\mathrm{abs}}(f,\tau), \qquad S_-(f,\tau) \le S_{\mathrm{abs}}(f,\tau).$$

La variación positiva y negativa de una función

$$\operatorname{PVar}_a^b(f) := \sup_{\tau\in\mathcal{P}(a,b)} S_+(f,\tau), \qquad \operatorname{NVar}_a^b(f) := \sup_{\tau\in\mathcal{P}(a,b)} S_-(f,\tau).$$

La variación positiva y negativa de una función

$$\mathrm{PVar}_a^b(f) := \sup_{\tau\in\mathcal{P}(a,b)} S_+(f,\tau), \qquad \mathrm{NVar}_a^b(f) := \sup_{\tau\in\mathcal{P}(a,b)} S_-(f,\tau).$$

Proposición (relación entre PVar y NVar)

Sea $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$. Entonces $\mathrm{PVar}_a^b(f) = \mathrm{NVar}_a^b(f) + f(b) - f(a)$.

La variación positiva y negativa de una función

$$\mathrm{PVar}_a^b(f) := \sup_{\tau\in\mathcal{P}(a,b)} S_+(f,\tau), \qquad \mathrm{NVar}_a^b(f) := \sup_{\tau\in\mathcal{P}(a,b)} S_-(f,\tau).$$

Proposición (relación entre PVar y NVar)

Sea $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$. Entonces $\quad \mathrm{PVar}_a^b(f) = \mathrm{NVar}_a^b(f) + f(b) - f(a)$.

Demostración. Para cada τ en $\mathcal{P}(a,b)$,

$$S_+(f,\tau) = S_-(f,\tau) + f(b) - f(a).$$

Ojo: en cada lado hay solo un término que depende de τ.

Pasamos al supremo sobre τ y obtenemos el resultado. $\square$

Proposición (Var en términos de PVar y NVar)

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces

$$\mathrm{Var}_a^b(f) = \mathrm{PVar}_a^b(f) + \mathrm{NVar}_a^b(f).$$

Proposición (Var en términos de PVar y NVar)

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces

$$\operatorname{Var}_a^b(f) = \operatorname{PVar}_a^b(f) + \operatorname{NVar}_a^b(f).$$

Un intento malo de demostración.

Usamos la igualdad

$$S_{\mathrm{abs}}(f, \tau) = S_+(f, \tau) + S_-(f, \tau).$$

En el lado derecho tenemos la suma de dos expresiones que dependen de τ.

Si pasamos al supremo sobre τ, solo obtenemos $\le$:

$$\sup_\tau(\phi(\tau) + \psi(\tau)) \le \sup_\tau \phi(\tau) + \sup_\tau \psi(\tau).$$

Proposición (Var en términos de PVar y NVar)

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces

$$\mathrm{Var}_a^b(f) = \mathrm{PVar}_a^b(f) + \mathrm{NVar}_a^b(f).$$

Proposición (Var en términos de PVar y NVar)

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces

$$\operatorname{Var}_a^b(f) = \operatorname{PVar}_a^b(f) + \operatorname{NVar}_a^b(f).$$

Una demostración correcta. Para cada τ en $\mathcal{P}(a, b)$

$$S_{\mathrm{abs}}(f, \tau) = S_+(f, \tau) + S_-(f, \tau) = 2S_-(f, \tau) + f(b) - f(a).$$

Ojo: en cada lado hay solo un término que depende de τ.
Pasamos al supremo sobre τ en $\mathcal{P}(a, b)$:

$$\operatorname{Var}_a^b(f) = 2\operatorname{NVar}_a^b(f) + f(b) - f(a).$$

Recordamos que $\operatorname{NVar}_a^b(f) + f(b) - f(a) = \operatorname{PVar}_a^b(f)$ y obtenemos el resultado. $\square$

Proposición (la variación total de una función creciente)

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces

$$\operatorname{PVar}_a^b(f) = f(b) - f(a), \qquad \operatorname{NVar}_a^b(f) = 0, \qquad \operatorname{Var}_a^b(f) = f(b) - f(a).$$

Proposición (la variación total de una función creciente)

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces

$$\mathrm{PVar}_a^b(f) = f(b) - f(a), \qquad \mathrm{NVar}_a^b(f) = 0, \qquad \mathrm{Var}_a^b(f) = f(b) - f(a).$$

Demostración. Para cada $\tau = (\tau_0, \ldots, \tau_n)$ en $\mathcal{P}(a,b)$, para cada j en $\{1, \ldots, n\}$ tenemos $f(\tau_j) - f(\tau_{j-1}) \ge 0$.

$$S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) = S_+(f,\tau) = \sum_{j=1}^{n} (f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})) = f(\tau_n) - f(\tau_0) = f(b) - f(a),$$

$$S_-(f,\tau) = \sum_{j=1}^{n} 0 = 0.$$

$\square$

Proposición (la variación total de una función creciente)

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces

$$\mathrm{PVar}_a^b(f) = f(b) - f(a), \qquad \mathrm{NVar}_a^b(f) = 0, \qquad \mathrm{Var}_a^b(f) = f(b) - f(a).$$

Demostración. Para cada $\tau = (\tau_0, \ldots, \tau_n)$ en $\mathcal{P}(a,b)$, para cada j en $\{1, \ldots, n\}$ tenemos $f(\tau_j) - f(\tau_{j-1}) \geq 0$.

$$S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) = S_+(f,\tau) = \sum_{j=1}^{n} (f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})) = f(\tau_n) - f(\tau_0) = f(b) - f(a),$$

$$S_-(f,\tau) = \sum_{j=1}^{n} 0 = 0.$$

□

Proposición (la variación total de una función decreciente)

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función decreciente. Entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{PVar}_a^b(f) &= 0,\\
\operatorname{NVar}_a^b(f) &= f(a) - f(b),\\
\operatorname{Var}_a^b(f) &= f(a) - f(b).
\end{aligned}$$

Proposición (la variación total de una función decreciente)

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función decreciente. Entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{PVar}_a^b(f) &= 0, \\ \mathrm{NVar}_a^b(f) &= f(a) - f(b), \\ \mathrm{Var}_a^b(f) &= f(a) - f(b). \end{aligned}$$

Consecuencia: si f es monótona,

$$\mathrm{Var}_a^b(f) = |f(b) - f(a)|.$$

La variación total de una función vectorial

($=$ la longitud de una curva en $\mathbb{R}^d$)

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$.

$$\forall x \in [a,b] \qquad f(x) = [f_k(x)]_{k=1}^d \in \mathbb{R}^d.$$

Para cada τ en $\mathcal{P}(a,b)$,

$$S_{\text{abs}}(f,\tau) := \sum_{j=1}^n \|f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})\|_2,$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^d$.

$$\operatorname{Var}_a^b(f) := \sup_{\tau \in \mathcal{P}(a,b)} S_{\text{abs}}(f,\tau).$$

La variación total de una función vectorial

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$,

$$\forall x \in [a,b] \qquad f(x) = [f_k(x)]_{k=1}^{d} \in \mathbb{R}^d.$$

La variación total de una función vectorial

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$,

$$\forall x \in [a,b] \qquad f(x) = [f_k(x)]_{k=1}^d \in \mathbb{R}^d.$$

Ejercicio.

Dados j en $\{1,\ldots,d\}$ y τ en $\mathcal{P}(a,b)$, acotar $S_{\text{abs}}(f_k,\tau)$ en términos de $S_{\text{abs}}(f,\tau)$.

La variación total de una función vectorial

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$,

$$\forall x \in [a,b] \qquad f(x) = [f_k(x)]_{k=1}^d \in \mathbb{R}^d.$$

Ejercicio.

Dados j en $\{1,\ldots,d\}$ y τ en $\mathcal{P}(a,b)$, acotar $S_{\mathrm{abs}}(f_k,\tau)$ en términos de $S_{\mathrm{abs}}(f,\tau)$.

Ejercicio.

Dada τ en $\mathcal{P}(a,b)$, acotar $S_{\mathrm{abs}}(f,\tau)$ en términos de $S_{\mathrm{abs}}(f_1,\tau),\ldots,S_{\mathrm{abs}}(f_d,\tau)$.

La variación total de una función vectorial

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$,

$$\forall x \in [a, b] \qquad f(x) = [f_k(x)]_{k=1}^d \in \mathbb{R}^d.$$

Ejercicio.
Dados j en $\{1, \ldots, d\}$ y τ en $\mathcal{P}(a, b)$, acotar $S_{\mathrm{abs}}(f_k, \tau)$ en términos de $S_{\mathrm{abs}}(f, \tau)$.

Ejercicio.
Dada τ en $\mathcal{P}(a, b)$, acotar $S_{\mathrm{abs}}(f, \tau)$ en términos de $S_{\mathrm{abs}}(f_1, \tau), \ldots, S_{\mathrm{abs}}(f_d, \tau)$.

Ejercicio. Demostrar que

$$\mathrm{Var}_a^b(f) < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall k \in \{1, \ldots, d\} \qquad \mathrm{Var}_a^b(f_k) < +\infty.$$

Planes para el futuro

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < c < b$.

En las siguientes clases demostraremos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}_a^b(f) &= \operatorname{Var}_a^c(f) + \operatorname{Var}_c^b(f),\\
\operatorname{PVar}_a^b(f) &= \operatorname{PVar}_a^c(f) + \operatorname{PVar}_c^b(f),\\
\operatorname{NVar}_a^b(f) &= \operatorname{NVar}_a^c(f) + \operatorname{NVar}_c^b(f).
\end{aligned}$$