La integral de Lebesgue
(una unidad del curso “Análisis real”)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

27 de mayo de 2021

Unidad "Integral de Lebesgue"

Objetivo:

definir la integral de Lebesgue y demostrar sus propiedades principales.

Prerrequisitos:

- nociones básicas sobre funciones (sobre todo, propiedades de la preimagen),
- supremos e ínfimos, límites superiores e inferiores,
- sigma-álgebras y sus conjuntos generadores, funciones medibles,
- funciones simples y sus propiedades,
- medidas y sus propiedades.

Plan

Plan

1. Integración de funciones simples medibles positivas
2. Integración de funciones medibles positivas
3. Integración de funciones reales
4. Integración de funciones complejas

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Sea $Y = [0, +\infty)$, o $Y = [0, +\infty]$, o $Y = \mathbb{R}$, o $Y = \mathbb{C}$.
Denotamos por $\mathcal{B}_Y$ la σ-álgebra de Borel de Y.

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) := \{f \in Y^X : \quad \forall B \in \mathcal{B}_Y \quad f^{-1}[B] \in \mathcal{F}\}.$$

Para $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, los rayos $(v, +\infty)$ generan $\mathcal{B}_Y$, por eso

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad f^{-1}[(v, +\infty)] \in \mathcal{F} \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad \{x \in X : \ f(x) > v\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Funciones simples medibles

Una función $f\colon X \to Y$ se llama simple si el conjunto $f[Y]$ es finito.

Representación canónica de funciones simples:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j 1_{P_j},$$

donde $v_1, \ldots, v_m \in Y$, diferentes a pares, $(P_1, \ldots, P_m)$ es una partición de Y.

En la definición de partición pedimos $P_j \neq \varnothing$ para cada j.

f es medible $\iff$ $P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y) := \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)\colon\ f[X] \text{ es finito}\}$.

Funciones simples medibles que se anulan fuera de un conjunto de medida finita

$$\mathcal{SM}_1(X,\mathcal{F},\mu,Y) := \{f \in \mathcal{SM}(X,\mathcal{F},Y)\colon\ \mu(f^{-1}[Y \setminus \{0\}]) < +\infty\}.$$

Si $f \in \mathcal{SM}_1(X,\mathcal{F},\mu,Y)$, entonces

$$f = 0 \cdot 1_{P_0} + \sum_{j=1}^{m} v_j 1_{P_j},$$

donde $v_1,\ldots,v_m \in Y \setminus \{0\}$, dif. a pares, $(P_1,\ldots,P_m)$ es una partición de $Y \setminus P_0$, $\mu(P_j) < +\infty$ para cada j en $\{1,\ldots,m\}$.

Se admiten los casos $P_0 = \varnothing$ y $\mu(P_0) = +\infty$.

Funciones indicadoras medibles

$$\mathcal{J}(X, \mathcal{F}) := \{1_A\colon\ A \in \mathcal{F}\}.$$

$$\mathcal{J}_1(X, \mathcal{F}, \mu) := \{1_A\colon\ A \in \mathcal{F},\ \mu(A) < +\infty\}.$$

En estos términos,

$$\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y) = \operatorname{span}_Y(\mathcal{J}(X, \mathcal{F}, Y)),$$
$$\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, Y) = \operatorname{span}_Y(\mathcal{J}_1(X, \mathcal{F}, \mu, Y)),$$

donde $\operatorname{span}_Y(C) :=$ las combinaciones lineales de C con coeficientes en Y.

Varios caminos equivalentes para definir la integral de Lebesgue

Idea principal:

$$\text{si} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}, \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Varios caminos equivalentes para definir la integral de Lebesgue

Idea principal:

$$\text{si} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}, \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Esta idea está realizada en varios caminos diferentes, pero equivalentes entre si.

Varios caminos equivalentes para definir la integral de Lebesgue

Idea principal:

$$\text{si} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}, \qquad \int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Esta idea está realizada en varios caminos diferentes, pero equivalentes entre si.

1. Bartle, Rudin, Cohn, Folland, etc.: empezar con $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.

Varios caminos equivalentes para definir la integral de Lebesgue

Idea principal:

$$\text{si} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}, \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Esta idea está realizada en varios caminos diferentes, pero equivalentes entre si.

1. Bartle, Rudin, Cohn, Folland, etc.: empezar con $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.
2. Halmos, Royden, etc.: empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty))$.

Varios caminos equivalentes para definir la integral de Lebesgue

Idea principal:

$$\text{si} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}, \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Esta idea está realizada en varios caminos diferentes, pero equivalentes entre si.

1. Bartle, Rudin, Cohn, Folland, etc.: empezar con $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.
2. Halmos, Royden, etc.: empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty))$.
3. Empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$.

Varios caminos equivalentes para definir la integral de Lebesgue

Idea principal:

$$\text{si} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} v_j\, 1_{P_j}, \qquad \int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j\, \mu(P_j).$$

Esta idea está realizada en varios caminos diferentes, pero equivalentes entre si.

1. Bartle, Rudin, Cohn, Folland, etc.: empezar con $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.
2. Halmos, Royden, etc.: empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty))$.
3. Empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$.
4. Simonenko: usar particiones del codominio.

Varios caminos equivalentes para definir la integral de Lebesgue

Idea principal:

$$\text{si} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}, \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Esta idea está realizada en varios caminos diferentes, pero equivalentes entre si.

1. Bartle, Rudin, Cohn, Folland, etc.: empezar con $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.
2. Halmos, Royden, etc.: empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty))$.
3. Empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$.
4. Simonenko: usar particiones del codominio.

En cada uno de estos caminos, la integral se define en varias etapas.

Varios caminos equivalentes para definir la integral de Lebesgue

Idea principal:

$$\text{si} \qquad f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}, \qquad \int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Esta idea está realizada en varios caminos diferentes, pero equivalentes entre si.

1. Bartle, Rudin, Cohn, Folland, etc.: empezar con $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.
2. Halmos, Royden, etc.: empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty))$.
3. Empezar con $\mathcal{SM}_1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$.
4. Simonenko: usar particiones del codominio.

En cada uno de estos caminos, la integral se define en varias etapas.

En este curso seguimos el camino 1.

Definición de la integral

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $A \in \mathcal{F}$.

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}.$$

Definición de la integral

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $A \in \mathcal{F}$.

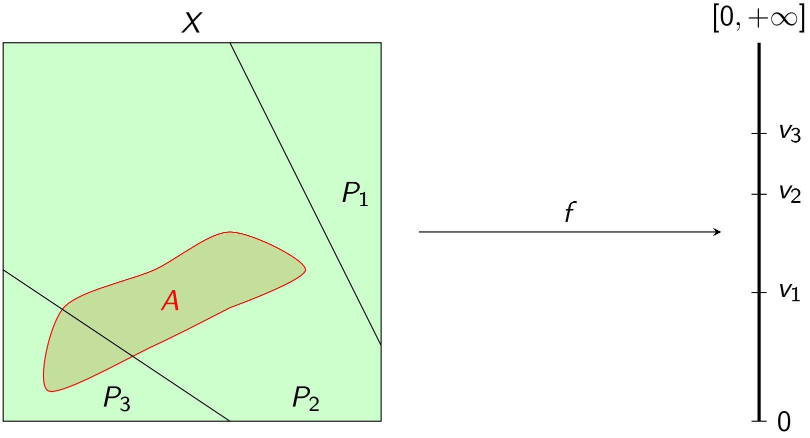
Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}.$$

Definimos

$$\boxed{\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j \cap A).}$$

También denotamos esta integral por $\displaystyle\int_A^{(1)} f \,\mathrm{d}\mu$.



$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = v_1 \, \mu(A \cap P_1) + v_2 \, \mu(A \cap P_2) + v_3 \, \mu(A \cap P_3).$$

Integrar sobre un conjunto o sobre todo el espacio

Proposición

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, 1_A \, \mathrm{d}\mu.$$

Integral de una función simple medible positiva dada por una representación generalizada

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

$$f = \sum_{k=1}^{n} w_k \, 1_{Q_k},$$

donde $w_1, \ldots, w_n \in [0, +\infty)$, $(Q_1, \ldots, Q_n)$ un partición generalizada de X.
Sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} w_k \, \mu(Q_k \cap A).$$

Propiedades básicas

Proposición

Si $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y $f(x) = b$ para cada x en A, entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = b\, \mu(A).$$

Propiedades lineales

Proposición

Sean $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$, $\lambda \in [0, +\infty)$, $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A (\lambda f) \, \mathrm{d}\mu = \lambda \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$, $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A (f + g) \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_A g \, \mathrm{d}\mu.$$

Plan

Definición de $\int f$ para f positiva

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$D_f := \{g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \colon \; g \leq f\}.$$

Definición de $\int f$ para f positiva

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$D_f := \{g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))\colon \; g \le f\}.$$

Dado $A \in \mathcal{F}$, definimos $J_A\colon \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \to [0, +\infty)$,

$$J_A(g) := \int_A^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu.$$

Definición de $\int f$ para f positiva

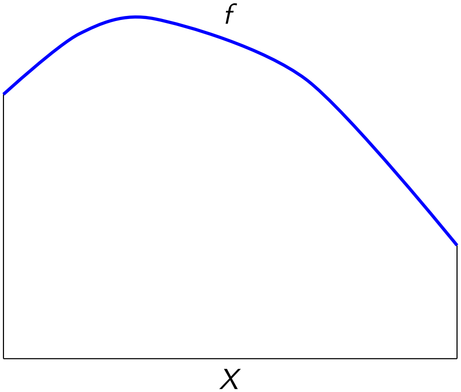
Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$D_f := \{g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))\colon\ g \le f\}.$$

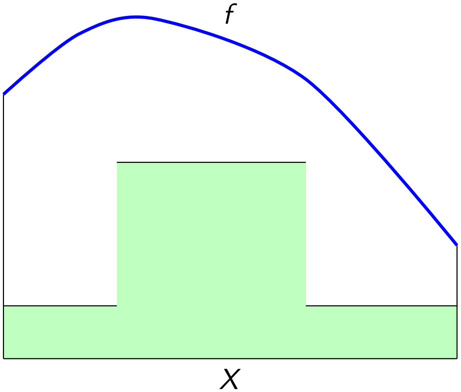
Dado $A \in \mathcal{F}$, definimos $J_A \colon \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \to [0, +\infty)$,

$$J_A(g) := \int_A^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu.$$

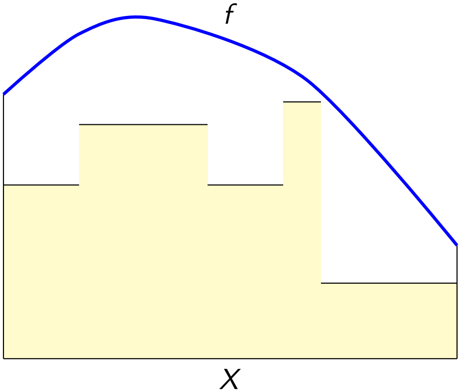
$$\int_A^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu := \sup(J_A[D_f]) = \sup\left\{\int_A^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu\colon \quad g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \le f\right\}.$$



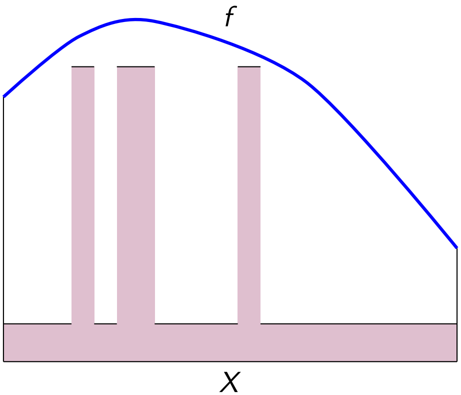
$$\int_A^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_A^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu : \quad g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \le f \right\}.$$



$$\int_A^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_A^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu : \quad g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \leq f \right\}.$$



$$\int_A^{(2)} f \,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{ \int_A^{(1)} g \,\mathrm{d}\mu \colon \quad g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \le f \right\}.$$



$$\int_A^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_A^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu : \quad g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \leq f \right\}.$$

Observaciones sobre la definición de $\int f$ para f positiva

Proposición

Si $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y $A \in \mathcal{F}$, entonces

$$\int_A^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Observaciones sobre la definición de $\int f$ para f positiva

Proposición

Si $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y $A \in \mathcal{F}$, entonces

$$\int_A^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Proposición

Si $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y $A \in \mathcal{F}$, entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, 1_A \, \mathrm{d}\mu.$$

Funciones positivas integrables

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty]) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty]) : \quad \int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Algunas propiedades simples

Suponemos $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$, $A \in \mathcal{F}$.

Algunas propiedades simples

Suponemos $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$, $A \in \mathcal{F}$.

Proposición

Si $f(x) = b$ para cada x en A, entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = b \, \mu(A).$$

Algunas propiedades simples

Suponemos $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$, $A \in \mathcal{F}$.

Proposición

Si $f(x) = b$ para cada x en A, entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = b \, \mu(A).$$

Proposición

Si $f \leq g$, entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Desigualdad de Chebyshov–Márkov

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mu, [0, +\infty])$ y sea $v \in (0, +\infty)$. Entonces

$$\mu(\{x \in X \colon\ f(x) \geq v\}) \leq \frac{1}{v} \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Desigualdad de Chebyshov–Márkov

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mu, [0, +\infty])$ y sea $v \in (0, +\infty)$. Entonces

$$\mu(\{x \in X\colon\ f(x) \geq v\}) \leq \frac{1}{v} \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Corolarios:

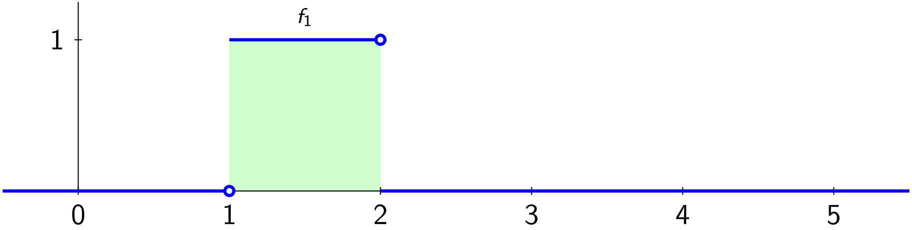
- Si $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, entonces $\mu(\{x \in X\colon\ f(x) = +\infty\}) = 0$.
- Si $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$, entonces $\mu(\{x \in X\colon\ f(x) > 0\}) = 0$.

La convergencia puntual no implica la convergencia de las integrales

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n = 1_{[n,n)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$

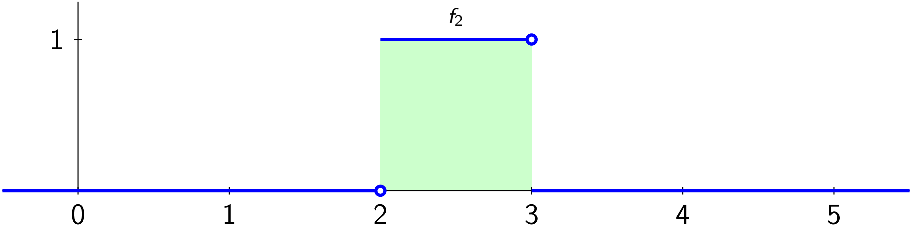
La convergencia puntual no implica la convergencia de las integrales

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n = 1_{[n,n)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$



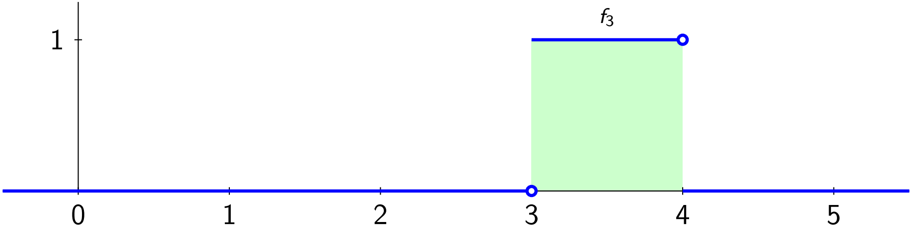
La convergencia puntual no implica la convergencia de las integrales

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n = 1_{[n,n)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$



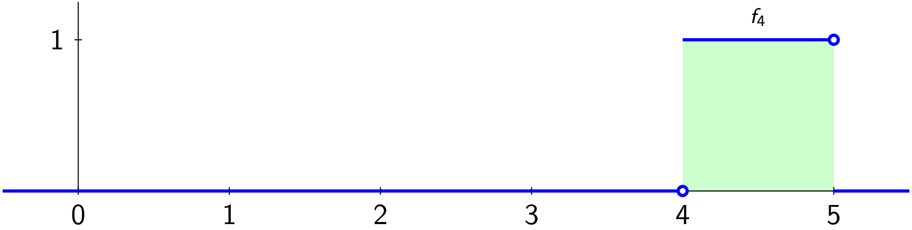
La convergencia puntual no implica la convergencia de las integrales

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n = 1_{[n,n)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$



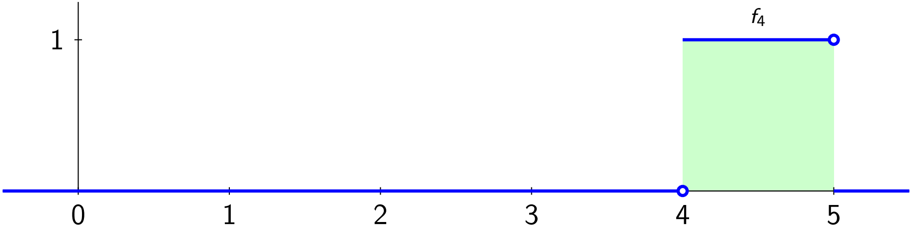
La convergencia puntual no implica la convergencia de las integrales

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n = 1_{[n,n)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$



La convergencia puntual no implica la convergencia de las integrales

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n = 1_{[n,n)}, \qquad g = 0_{\mathbb{R}}.$$



$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\mu = 1, \qquad \text{pero} \qquad \int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Teorema de la convergencia monótona

Teorema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},[0,+\infty])$.

Supongamos que para cada x en X la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

Pongamos $g(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Teorema de la convergencia monótona

Teorema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},[0,+\infty])$.

Supongamos que para cada x en X la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

Pongamos $g(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

El resultado más difícil en esta unidad del curso (en el camino elegido): demostrar la desigualdad $\geq$ en este teorema.

Teorema de la convergencia monótona

Teorema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},[0,+\infty])$.

Supongamos que para cada x en X la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

Pongamos $g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

El resultado más difícil en esta unidad del curso (en el camino elegido): demostrar la desigualdad $\geq$ en este teorema.

Un error típico en la demostración: creer que existe n tal que $f_n \geq g$.

Lema de Fatou

Proposición

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu.$$

Aproximación de la integral por medio de una sucesión de integrales

Corolario (del teorema de la convergencia monótona)

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tal que $s_n \nearrow f$.

Entonces

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \,\mathrm{d}\mu.$$

La integral de la suma de dos funciones positivas

Proposición

Si $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, entonces

$$\int_X (f + g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

La integral de una serie de funciones positivas

Proposición

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

La medida definida como la integral de una función positiva sobre un conjunto de integración variable

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Definimos $\varphi \colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(A) := \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una medida.

La continuidad de la integral respecto al conjunto de integración, para funciones positivas

Proposición

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$. Entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall A \in \mathcal{F} \qquad \left(\mu(A) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \int_A f \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon \right).$$

Plan

1. Integración de funciones simples medibles positivas
2. Integración de funciones medibles positivas
3. Integración de funciones reales
4. Integración de funciones complejas

La parte positiva y la parte negativa

Definimos $P, N\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $\quad P(t) := \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad N(t) := \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ -t, & t < 0. \end{cases}$

La parte positiva y la parte negativa

Definimos $P, N\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $P(t) := \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$ $N(t) := \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ -t, & t < 0. \end{cases}$

Dada $f\colon X \to \mathbb{R}$, tenemos

$$f = (P \circ f) - (N \circ f), \qquad |f| = (P \circ f) + (N \circ f).$$

La parte positiva y la parte negativa

Definimos $P, N\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $P(t) := \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$ $N(t) := \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ -t, & t < 0. \end{cases}$

Dada $f\colon X \to \mathbb{R}$, tenemos

$$f = (P \circ f) - (N \circ f), \qquad |f| = (P \circ f) + (N \circ f).$$

La última igualdad implica que $P \circ f \leq |f|$ y $N \circ f \leq |f|$.

La parte positiva y la parte negativa

Definimos $P, N\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $P(t) := \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$ $N(t) := \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ -t, & t < 0. \end{cases}$

Dada $f\colon X \to \mathbb{R}$, tenemos

$$f = (P \circ f) - (N \circ f), \qquad |f| = (P \circ f) + (N \circ f).$$

La última igualdad implica que $P \circ f \leq |f|$ y $N \circ f \leq |f|$.

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Entonces

$$\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_X (P \circ f) \,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \wedge \quad \int_X (N \circ f) \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Definición de $\int f$ para f real medible

$$\mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{R}) \colon \ \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Definición de $\int f$ para f real medible

$$\mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{R})\colon \quad \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Si $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{R})$ y $A \in \mathcal{F}$,

$$\int_A^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu := \int_A^{(2)} (P \circ f) \, \mathrm{d}\mu - \int_A^{(2)} (N \circ f) \, \mathrm{d}\mu.$$

Definición de $\int f$ para f real medible

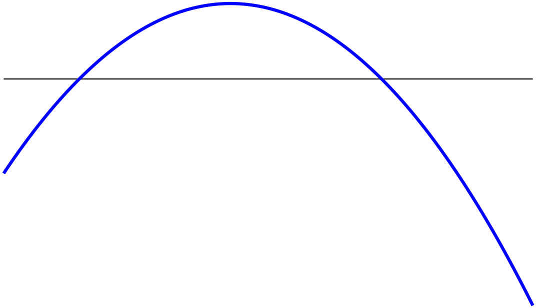
$$\mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{R})\colon \quad \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Si $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{R})$ y $A \in \mathcal{F}$,

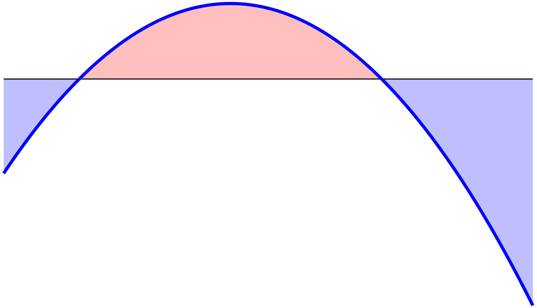
$$\int_A^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu := \int_A^{(2)} (P \circ f) \, \mathrm{d}\mu - \int_A^{(2)} (N \circ f) \, \mathrm{d}\mu.$$

Proposición

Si $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,[0,+\infty])$ y $A \in \mathcal{F}$, entonces $\displaystyle\int_A^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu$.



$$\int_A^{(3)} f \,\mathrm{d}\mu := \int_A^{(2)} (P \circ f) \,\mathrm{d}\mu - \int_A^{(2)} (N \circ f) \,\mathrm{d}\mu.$$



$$\int_A^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu := \int_A^{(2)} (P \circ f) \, \mathrm{d}\mu - \int_A^{(2)} (N \circ f) \, \mathrm{d}\mu.$$

Propiedad aditiva

Proposición

Sean $f, g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$, $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_A g\,\mathrm{d}\mu.$$

Propiedad aditiva

Proposición

Sean $f, g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$, $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_A g\,\mathrm{d}\mu.$$

Una demostración falsa: $P \circ (f+g) = (P \circ f) + (P \circ g)$.

Propiedad aditiva

Proposición

Sean $f, g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$, $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_A g\,\mathrm{d}\mu.$$

Una demostración falsa: $P \circ (f+g) = (P \circ f) + (P \circ g)$.

Idea de una demostración correcta:

$$P \circ (f+g) - N \circ (f+g) = f + g = P \circ f - N \circ f + P \circ g - N \circ g,$$

$$P \circ (f+g) + N \circ f + N \circ g = N \circ (f+g) + P \circ f + P \circ g.$$

Plan

La parte real y la parte imaginaria

Para $z \in \mathbb{C}$, $z = x + \mathrm{i}\, y$ (con $x, y \in \mathbb{R}$), $\quad \mathrm{Re}(z) := x, \quad \mathrm{Im}(z) := y$.

Entonces

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\, \mathrm{Im}(z), \qquad |z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2},$$

$$|z| \le |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|, \qquad |\mathrm{Re}(z)| \le |z|, \qquad |\mathrm{Im}(z)| \le |z|.$$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Entonces

$$\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_X |\mathrm{Re}(f)| \,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \wedge \quad \int_X |\mathrm{Im}(f)| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Definición de $\int f$ para f compleja

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \colon \quad \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Definición de $\int f$ para f compleja

$$\mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C}) \colon \quad \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Si $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{F}$,

$$\int_A^{(4)} f\,\mathrm{d}\mu := \int_A^{(3)} \mathrm{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int_A^{(3)} \mathrm{Im}(f)\,\mathrm{d}\mu.$$

Definición de $\int f$ para f compleja

$$\mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C}) : \quad \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Si $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{F}$,

$$\int_A^{(4)} f \,\mathrm{d}\mu := \int_A^{(3)} \mathrm{Re}(f) \,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_A^{(3)} \mathrm{Im}(f) \,\mathrm{d}\mu.$$

Proposición

Si $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{R})$ y $A \in \mathcal{F}$, entonces $\displaystyle\int_A^{(4)} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A^{(3)} f \,\mathrm{d}\mu.$

Propiedades lineales

Proposición

Sean $f, g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_A g\,\mathrm{d}\mu,$$

$$\int_A (\lambda f)\,\mathrm{d}\mu = \lambda \int_A f\,\mathrm{d}\mu.$$

Propiedades lineales

Proposición

Sean $f, g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_A g\,\mathrm{d}\mu,$$

$$\int_A (\lambda f)\,\mathrm{d}\mu = \lambda \int_A f\,\mathrm{d}\mu.$$

Sale fácilmente de las propiedades lineales de $\int$ de funciones reales, usando propiedades de Re e Im:

$$\mathrm{Re}(f+g) = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{Re}(g), \quad \mathrm{Re}(\lambda f) = \mathrm{Re}(\lambda)\,\mathrm{Re}(f) - \mathrm{Im}(\lambda)\,\mathrm{Im}(f), \quad \ldots.$$

El valor absoluto de la integral

Teorema

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Entonces

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

El valor absoluto de la integral

Teorema

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Entonces

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Un camino malo de demostracion:

Si empezamos con $|\int f| \leq |\int \mathrm{Re}(f)| + |\int \mathrm{Im}(f)|$, no podremos llegar al resultado.

El valor absoluto de la integral

Teorema

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Entonces

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \le \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Un camino malo de demostracion:

Si empezamos con $|\int f| \le |\int \operatorname{Re}(f)| + |\int \operatorname{Im}(f)|$, no podremos llegar al resultado.

Un camino bueno:

poner $\quad z := \displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu \quad$ y encontrar τ con $|\tau| = 1$ y $\tau z = |z|$.

El teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

Teorema

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$ y sea $g\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$.
Supongamos que $f_n \xrightarrow{X} g$.
Adicionalmente, suponemos que

$$\exists h\in\mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,[0,+\infty]) \text{ tal que } |f_n|\le h \text{ para cada } n.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu=\int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración: aplicar el lema de Fatou a la sucesión $\big(2h-|f_n-g|\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

La integral de una serie de funciones complejas

Proposición

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mu)$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Entonces

$$\int_X\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Igualdad de funciones casi en todas partes

Para $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$,

$$f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} g \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \mu(\{x \in X : \ f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Esta relación binaria es una relación de equivalencia.

Si $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} g$, entonces

$$\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_X |g| \, \mathrm{d}\mu < +\infty,$$

y

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

La continuidad de la integral respecto al conjunto de integración, para funciones complejas

Consideramos $\mathcal{F}$ con la siguiente pseudométrica:

$$\rho(P, Q) := \mu(P \triangle Q).$$

La continuidad de la integral respecto al conjunto de integración, para funciones complejas

Consideramos $\mathcal{F}$ con la siguiente pseudométrica:

$$\rho(P, Q) := \mu(P \triangle Q).$$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Definimos $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathbb{C}$,

$$\varphi(P) := \int_P f \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces φ es una función uniformemente continua.

Razones para usar la integral de Lebesgue (en vez de la integral de Riemann)

- En varios ejemplos, los dominios de funciones no tienen una estructura buena y no se identifican fácilmente con subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.
  En estos casos la integral de Riemann no está definida.

Razones para usar la integral de Lebesgue (en vez de la integral de Riemann)

- En varios ejemplos, los dominios de funciones no tienen una estructura buena y no se identifican fácilmente con subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.
  En estos casos la integral de Riemann no está definida.
- Hay funciones que no son Riemann-integrables, pero son Lebesgue-integrables.

Razones para usar la integral de Lebesgue (en vez de la integral de Riemann)

- En varios ejemplos, los dominios de funciones no tienen una estructura buena y no se identifican fácilmente con subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.
  En estos casos la integral de Riemann no está definida.
- Hay funciones que no son Riemann-integrables, pero son Lebesgue-integrables.
- En la teoría de la integral de Lebesgue hay herramientas más poderosas (por ejemplo, los teoremas de convergencia).

Razones para usar la integral de Lebesgue (en vez de la integral de Riemann)

- En varios ejemplos, los dominios de funciones no tienen una estructura buena y no se identifican fácilmente con subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.
  En estos casos la integral de Riemann no está definida.
- Hay funciones que no son Riemann-integrables, pero son Lebesgue-integrables.
- En la teoría de la integral de Lebesgue hay herramientas más poderosas (por ejemplo, los teoremas de convergencia).
- Los espacios $L^p(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ son completos.

Una aplicación importante: espacios de funciones p-integrables

Para $p \in [1, +\infty)$,

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \colon \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Los espacios $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ son completos.

Varios objetos de estudio de la mecánica cuántica se pueden identificar con operadores lineales (no acotados) en $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$.