Análisis Matemático III, programa del curso (continuación de Análisis Real)

Egor Maximenko,

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

27 de agosto de 2024

Programa

El curso consiste de las siguientes unidades.

- Conjuntos convexos y funciones convexas.
- Espacios L^p.
- Integración sobre productos de espacios de medida.
- Derivación e integración.
- Integrales que dependen de parámetros.
- Transformada de Fourier.
- Convolución.

Algunas aplicaciones

- Teoría de probabilidad avanzada.
- Teoría de procesos estocásticos.

- Análisis armónico (análisis de Fourier).
- Teoría de aproximaciones.
- Análisis funcional.
- Teoría de operadores, álgebras de operadores.

- Teoría de distribuciones (funciones generalizadas).
- Teoría de ecuaciones diferenciales.
- Algunos modelos físicos.

Prerrequisitos

- Conocimientos muy sólidos de Análisis Real II.
- Conocimientos muy sólidos de Cálculo.
- Para algunos ejemplos, pueden ser útiles habilidades de programación.

Bibliografía principal

- Gerald B. Folland. Real analysis: modern techniques and their applications.
- Halsey L. Royden, Patrick M. Fitzpatrick. Real Analysis.
- Donald L. Cohn. Measure theory.
- Walter Rudin. Real and complex analysis.
- José María Rocha Martínez. Un primer curso de integración de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.
- Olgierd A. Biberstein. Teoría de la Integral. Notas de la E.S.F.M. del I.P.N.
- Bernard R. Gelbaum and John M. H. Olmsted. Counterexamples in analysis.
- Paul R. Halmos. Measure theory.

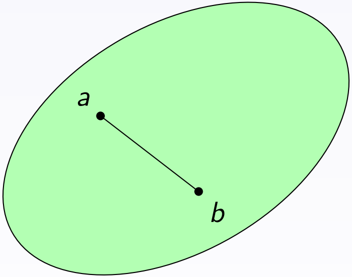
Sistema de evaluación

- Exámenes parciales: 50 %.
  Habrá 2 o 3 exámenes parciales.
- Exposiciones de los estudiantes, por equipos.
  Se espera que cada estudiante haga 3 exposiciones durante el semestre.
- Tareas grandes, por equipos de 2 o 3 personas.
  Requieren un estudio adicional de bibliografía.
  Se esperan 1 o 2 tareas grandes.
- Tareas pequeñas, por equipos de 3 personas.
  Voy a componer 1 o 2 tareas pequeñas.

Conjuntos convexos y funciones convexas

Sea V un espacio vectorial real. Un conjunto $A \subseteq V$ se llama convexo si

$$\forall a, b \in A \qquad \forall \lambda \in [0,1] \qquad (1-\lambda)a + \lambda b \in A.$$



Conjuntos convexos y funciones convexas

Dado $A \subseteq V$, su envoltura convexa $\operatorname{conv}(A)$ se define como el conjunto de todas las combinaciones convexas de los puntos de A:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k, \qquad m \in \mathbb{N}, \quad a_1, \ldots, a_m \in A, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1.$$

Teorema

Sea $A \subseteq V$. Entonces $\operatorname{conv}(A)$ es convexo.

Conjuntos convexos y funciones convexas

Dado $A \subseteq V$, su envoltura convexa $\operatorname{conv}(A)$ se define como el conjunto de todas las combinaciones convexas de los puntos de A:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k, \qquad m \in \mathbb{N}, \quad a_1, \ldots, a_m \in A, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1.$$

Teorema

Sea $A \subseteq V$. Entonces $\operatorname{conv}(A)$ es convexo.

Teorema

Sea $A \subseteq V$. Entonces A es convexo $\Leftrightarrow \operatorname{conv}(A) = A$.

Conjuntos convexos y funciones convexas

Dado $A \subseteq V$, su envoltura convexa $\mathrm{conv}(A)$ se define como el conjunto de todas las combinaciones convexas de los puntos de A:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k, \qquad m \in \mathbb{N}, \quad a_1, \dots, a_m \in A, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1.$$

Teorema

Sea $A \subseteq V$. Entonces $\mathrm{conv}(A)$ es convexo.

Teorema

Sea $A \subseteq V$. Entonces A es convexo $\Leftrightarrow$ $\mathrm{conv}(A) = A$.

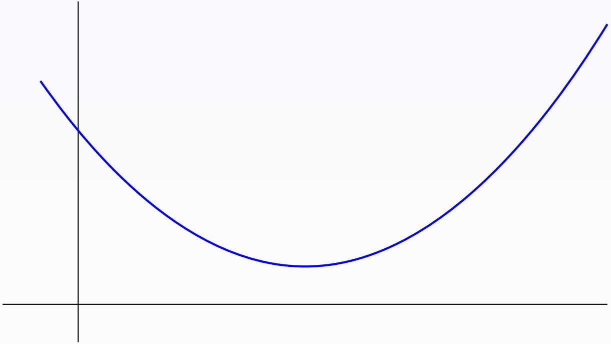
Demostrar el criterio de intervalos en $\mathbb{R}$.

Conjuntos convexos y funciones convexas

Sea V un espacio vectorial real y sea X un subconjunto convexo de V.

Una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ se llama convexa si

$$\forall a, b \in X \qquad \forall \lambda \in [0,1] \qquad f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \le (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

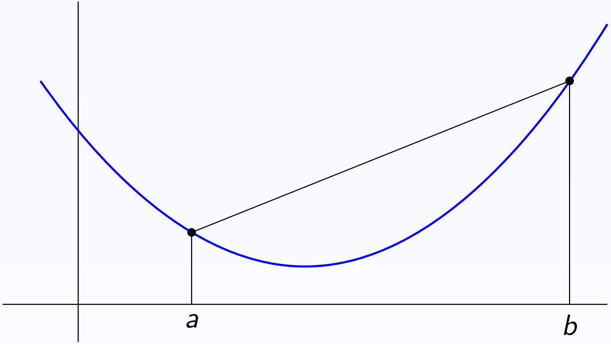


Conjuntos convexos y funciones convexas

Sea V un espacio vectorial real y sea X un subconjunto convexo de V.

Una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ se llama convexa si

$$\forall a, b \in X \qquad \forall \lambda \in [0,1] \qquad f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b).$$

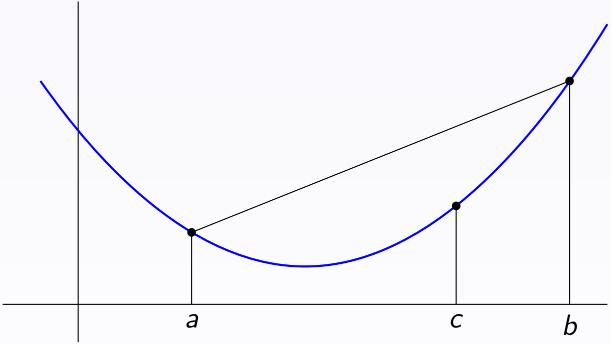


Conjuntos convexos y funciones convexas

Sea V un espacio vectorial real y sea X un subconjunto convexo de V.

Una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ se llama convexa si

$$\forall a, b \in X \qquad \forall \lambda \in [0,1] \qquad f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$



Conjuntos convexos y funciones convexas

Diferencias divididas del primer orden:

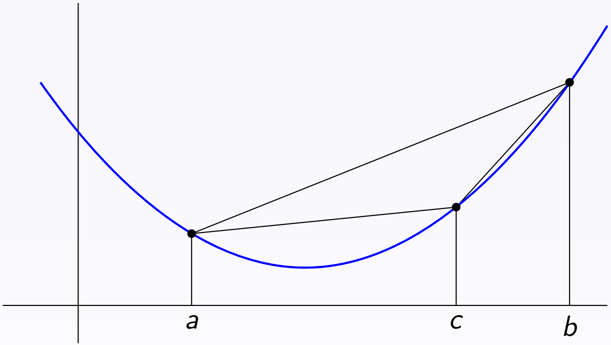
$$\Delta_f(x_1, x_2) := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Diferencias divididas del segundo orden:

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) := \frac{\Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}.$$

- Caracterizar las funciones crecientes en términos de las diferencias divididas.
- Caracterizar las funciones convexas en términos de las diferencias divididas.

Conjuntos convexos y funciones convexas



$$\Delta_f(a, c) \leq \Delta_f(a, b) \leq \Delta_f(c, b).$$

Conjuntos convexos y funciones convexas

Teorema

Sea $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ tal que f'' existe en cada punto. Entonces

$$f \text{ es convexa} \quad \Longleftrightarrow \quad f'' \geq 0.$$

Conjuntos convexos y funciones convexas

Teorema

Sea $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ tal que f'' existe en cada punto. Entonces

$$f \text{ es convexa} \iff f'' \geq 0.$$

Proposición

La función $\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa.

Conjuntos convexos y funciones convexas

Teorema

Sea $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ tal que f'' existe en cada punto. Entonces

$$f \text{ es convexa} \quad \Longleftrightarrow \quad f'' \geq 0.$$

Proposición

La función $\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa.

Proposición (desigualdad de Young)

Sean $a, b \geq 0$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Espacios L^p

Para $1 \leq p < +\infty$, definimos la seminorma extendida $\mathcal{N}_p \colon \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \to [0, +\infty]$,

$$\mathcal{N}_p(f) \coloneqq \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

Espacios L^p

Para $1 \leq p < +\infty$, definimos la seminorma extendida $\mathcal{N}_p \colon \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \to [0, +\infty]$,

$$\mathcal{N}_p(f) \coloneqq \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

Definir la seminorma extendida $\mathcal{N}_\infty$:

$$\mathcal{N}_\infty(f) \coloneqq \inf \Big\{ v \in [0, +\infty] \colon \quad \mu(\{x \in X \colon \ |f(x)| > v\}) = 0 \Big\}.$$

Teorema (desigualdad de Hölder)

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$\mathcal{N}_1(fg) \leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g).$$

Teorema (desigualdad de Hölder)

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$\mathcal{N}_1(fg) \leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g).$$

Teorema (desigualdad de Minkowski)

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Entonces

$$\mathcal{N}_p(f+g) \leq \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g).$$

Teorema (desigualdad de Hölder)

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$\mathcal{N}_1(fg) \leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g).$$

Teorema (desigualdad de Minkowski)

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Entonces

$$\mathcal{N}_p(f + g) \leq \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g).$$

Problema: encontrar criterios de igualdad en las desigualdades de Young, Hölder y Minkowski.

Espacios L^p

- Definimos los espacios seminormados

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C}) : \quad \mathcal{N}_p(f) < +\infty\}.$$

Espacios L^p

- Definimos los espacios seminormados

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C}) \colon \quad \mathcal{N}_p(f) < +\infty\}.$$

- Consideramos el subespacio

$$\mathcal{Z}(X,\mu) \ := \ \{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C}) \colon \quad \mu(\{x \in X \colon \ f(x) \neq 0\}) = 0\}.$$

Espacios L^p

- Definimos los espacios seminormados

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C})\colon \quad \mathcal{N}_p(f) < +\infty\}.$$

- Consideramos el subespacio

$$\mathcal{Z}(X,\mu) \ := \ \{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C})\colon \quad \mu(\{x \in X\colon \ f(x) \neq 0\}) = 0\}.$$

Demostramos que $\quad \mathcal{Z}(X,\mu) \ = \ \{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C})\colon \quad \mathcal{N}_p(f) = 0\}.$

Espacios L^p

- Definimos los espacios seminormados

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C}): \quad \mathcal{N}_p(f) < +\infty\}.$$

- Consideramos el subespacio

$$\mathcal{Z}(X,\mu) \;:=\; \{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C}): \quad \mu(\{x \in X: \;f(x) \neq 0\}) = 0\}.$$

  Demostramos que $\mathcal{Z}(X,\mu) \;=\; \{f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C}): \quad \mathcal{N}_p(f) = 0\}.$

- Definimos el espacio normado cociente

$$L^p(X,\mu) \;:=\; \mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{Z}(X,\mu).$$

Espacios L^p

Teorema

$L^p(X, \mu)$ es completo.

Integración sobre productos de espacios de medida

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida σ-finita.

- Denotamos por $\mathcal{R}$ el conjunto de los "rectángulos medibles":

$$\mathcal{R} \; := \; \{A \times B: \quad A \in \mathcal{F}, \quad B \in \mathcal{G}\}.$$

Integración sobre productos de espacios de medida

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida σ-finita.

- Denotamos por $\mathcal{R}$ el conjunto de los "rectángulos medibles":

$$\mathcal{R} \ := \ \{A \times B : \quad A \in \mathcal{F}, \quad B \in \mathcal{G}\}.$$

- Demostrar que $\mathcal{R}$ es una semiálgebra.

Integración sobre productos de espacios de medida

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida σ-finita.

- Denotamos por $\mathcal{R}$ el conjunto de los "rectángulos medibles":

$$\mathcal{R} \;\coloneqq\; \{A \times B : \quad A \in \mathcal{F}, \quad B \in \mathcal{G}\}.$$

- Demostrar que $\mathcal{R}$ es una semiálgebra.
- Estudiar la σ-álgebra $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ generada por $\mathcal{R}$.

Integración sobre productos de espacios de medida

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida σ-finita.

- Denotamos por $\mathcal{R}$ el conjunto de los “rectángulos medibles”:

$$\mathcal{R} \ := \ \{A \times B : \quad A \in \mathcal{F}, \quad B \in \mathcal{G}\}.$$

- Demostrar que $\mathcal{R}$ es una semiálgebra.
- Estudiar la σ-álgebra $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ generada por $\mathcal{R}$.
- Estudiar las funciones medibles $f : X \times Y \to \mathbb{C}$.

Integración sobre productos de espacios de medida

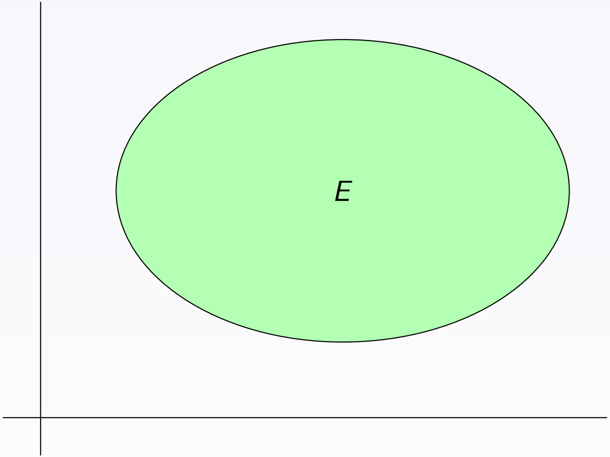
Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida σ-finita.

- Denotamos por $\mathcal{R}$ el conjunto de los "rectángulos medibles":

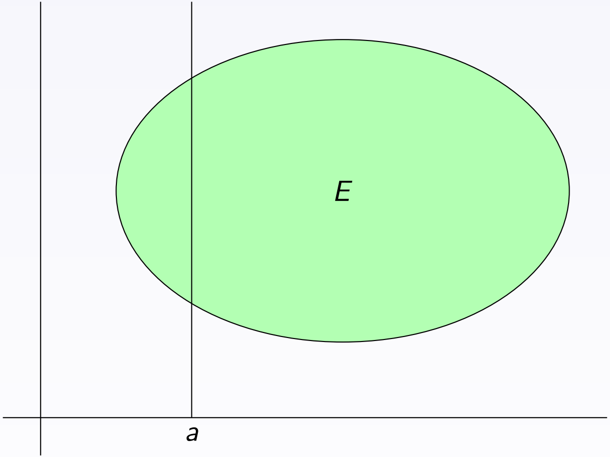
$$\mathcal{R} \;:=\; \{A \times B : \quad A \in \mathcal{F}, \quad B \in \mathcal{G}\}.$$

- Demostrar que $\mathcal{R}$ es una semiálgebra.
- Estudiar la σ-álgebra $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ generada por $\mathcal{R}$.
- Estudiar las funciones medibles $f : X \times Y \to \mathbb{C}$.
- Definir el producto de las medidas, $\mu \times \nu$.

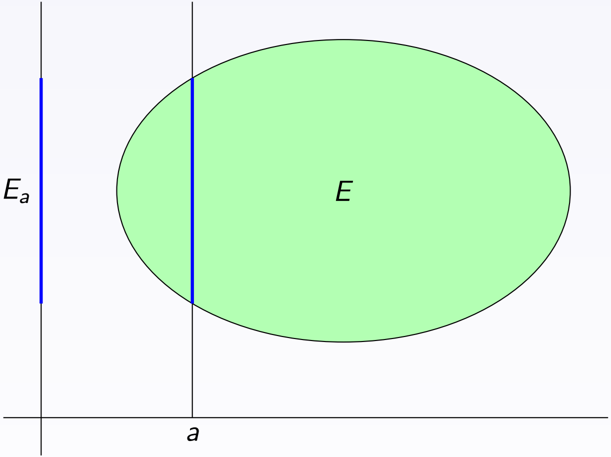
Integración sobre productos de espacios de medida



Integración sobre productos de espacios de medida

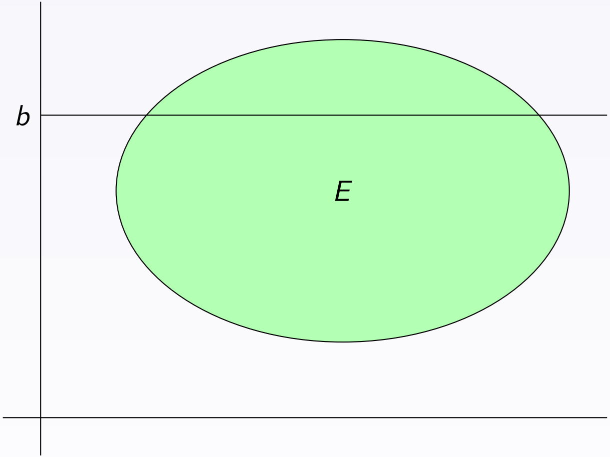


Integración sobre productos de espacios de medida

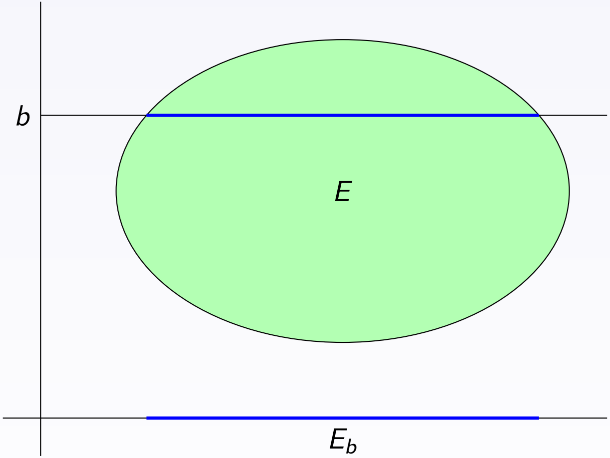


$$E_a = \{y \in Y : \ (a, y) \in E\}$$

Integración sobre productos de espacios de medida

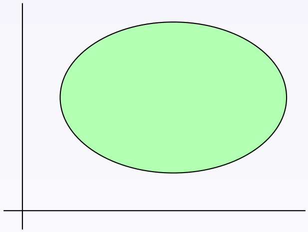


Integración sobre productos de espacios de medida



$$E^b = \{x \in X : \ (x, b) \in E\}$$

Integración sobre productos de espacios de medida

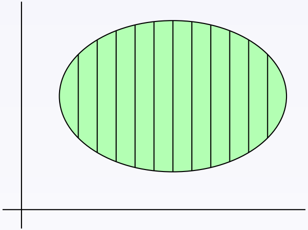


Teorema

Sea $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Entonces

$$\int_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Integración sobre productos de espacios de medida

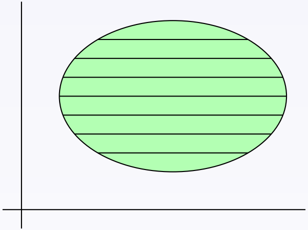


Teorema

Sea $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Entonces

$$\int_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Integración sobre productos de espacios de medida

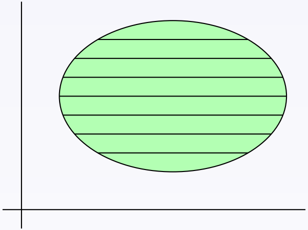


Teorema

Sea $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Entonces

$$\int_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Integración sobre productos de espacios de medida



Teorema

Sea $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Entonces

$$\int_X \nu(E_x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, \mathrm{d}\nu(y).$$

La medida $\mu \times \nu$ se define como esta integral.

Integración sobre productos de espacios de medida

Teorema (Tonelli)

Sea $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \times \nu, [0, +\infty])$, donde μ y ν son σ-finitas. Entonces

$$\int_{X \times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

Integración sobre productos de espacios de medida

Teorema (Tonelli)

Sea $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \times \nu, [0, +\infty])$, donde μ y ν son σ-finitas. Entonces

$$\int_{X \times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

Teorema (Fubini)

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \times \nu, \mathbb{C})$, donde μ y ν son σ-finitas. Entonces

$$\int_{X \times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

Derivación e integración

Definir funciones de variación acotada y funciones absolutamente continuas.

$$\mathrm{BV}([a,b]), \qquad \mathrm{AC}([a,b]).$$

Demostrar los teoremas fundamentales de cálculo en el contexto de la integral de Lebesgue.

Derivación e integración

Primer teorema fundamental de cálculo

Si $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathcal{F},\mathbb{C})$ y

$$F(x) := \int_a^x f \, \mathrm{d}\mu,$$

entonces

$$F'(x) = f(x) \qquad \mu\text{-c.t.p.}$$

Segundo teorema fundamental de cálculo

Si $F \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$, entonces

$$\int_a^b F' \, \mathrm{d}\mu = F(b) - F(a).$$

Integrales que dependen de los parámetros

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$.

Definimos $\Phi\colon Y \to \mathbb{C}$,

$$\Phi(y) \coloneqq \int_X f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x),$$

Integrales que dependen de los parámetros

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$.

Definimos $\Phi\colon\ Y \to \mathbb{C}$,

$$\Phi(y) := \int_X f(x, y)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

Teorema (continuidad de la función definida por una integral)

Supongamos que Y es un espacio métrico y se cumplen las siguientes condiciones:

- $\forall y \in Y$ la función f^y es de clase $L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$;
- para μ-casi todo x en X, la función f_x es continua en el punto y_0.
- $\exists g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$ tal que $|f(x, y)| \le g(x)$ para cada y en Y y c.t.p. x en X.

Entonces Φ es continua en el punto y_0.

Integrales que dependen de los parámetros

$$\Phi(y) := \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

Teorema (regla de Leibniz para derivar bajo el signo integral)

Sea Y un intervalo en $\mathbb{R}$. Supongamos que f tiene las siguientes propiedades:

(i) $\forall y \in Y$, $f^y \in L^1(X,\mu)$.

(ii) para casi todo x en X, la función f_x es derivable.

(iii) $\exists g \in L^1(X,\mu)$ tal que $|f_x'(y)| \le g(x)$ para casi todo $x \in X$ y $\forall \lambda \in Y$.

Entonces

$$\Phi'(y) = \int_X f_x'(y)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Transformada de Fourier

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, se definen $\mathcal{F}f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\widetilde{\mathcal{F}}f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x), \qquad (\widetilde{\mathcal{F}}f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Teorema de inversión de Fourier

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tal que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Entonces

$$\widetilde{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f.$$

Teorema de Plancherel

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Entonces

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2.$$

Convolución

Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Definimos $f * g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Demostramos que la operación $*$ es asociativa y conmutativa.

Teorema de convolución

Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Entonces

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).$$