

Límites superiores e inferiores de funciones (un tema del curso “Análisis real”)

Egor Maximenko

<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

19 de octubre de 2021

Definición

En esta presentación nos restringimos a la situación, cuando A es un intervalo de \mathbb{R} , $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \text{clos}(A)$.

$$\limsup_{t \rightarrow x} f(t) := \inf_{\delta > 0} \sup_{t \in A \cap (x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\}} f(t),$$

$$\liminf_{t \rightarrow x} f(t) := \sup_{\delta > 0} \inf_{t \in A \cap (x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\}} f(t).$$

De manera similar,

$$\limsup_{t \rightarrow x^+} f(t) := \inf_{\delta > 0} \sup_{t \in A \cap (x, x + \delta)} f(t).$$

Ejercicio. Escribir definiciones de $\liminf_{t \rightarrow x^-} f(t)$, etc.

Otra forma equivalente, con límites

Proposición

Sean A un intervalo de \mathbb{R} , $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $\inf(A) \leq x < \sup(A)$. Entonces

$$\limsup_{t \rightarrow x^+} f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t).$$

Otra forma equivalente, con límites

Proposición

Sean A un intervalo de \mathbb{R} , $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $\inf(A) \leq x < \sup(A)$. Entonces

$$\limsup_{t \rightarrow x^+} f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t).$$

Demostración. Para cada $\delta > 0$, definimos $g(\delta) := \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t)$.

Otra forma equivalente, con límites

Proposición

Sean A un intervalo de \mathbb{R} , $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $\inf(A) \leq x < \sup(A)$. Entonces

$$\limsup_{t \rightarrow x^+} f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t).$$

Demostración. Para cada $\delta > 0$, definimos $g(\delta) := \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t)$.

La función g es creciente.

Otra forma equivalente, con límites

Proposición

Sean A un intervalo de \mathbb{R} , $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $\inf(A) \leq x < \sup(A)$. Entonces

$$\limsup_{t \rightarrow x^+} f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t).$$

Demostración. Para cada $\delta > 0$, definimos $g(\delta) := \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t)$.

La función g es creciente. Luego

$$\inf_{\delta > 0} g(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} g(\delta).$$

Otra forma equivalente, con límites

Proposición

Sean A un intervalo de \mathbb{R} , $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $\inf(A) \leq x < \sup(A)$. Entonces

$$\limsup_{t \rightarrow x^+} f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t).$$

Demostración. Para cada $\delta > 0$, definimos $g(\delta) := \sup_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t)$.

La función g es creciente. Luego

$$\inf_{\delta > 0} g(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} g(\delta).$$

Al sustituir la definición de g , obtenemos el resultado deseado. □

Ejercicio simple. Demostrar que

$$\liminf_{t \rightarrow x^+} f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t).$$

Ejercicio simple. Demostrar que

$$\liminf_{t \rightarrow x^+} f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t).$$

Ejercicio simple. Demostrar que

$$\liminf_{t \rightarrow x^+} f(t) \leq \limsup_{t \rightarrow x^+} f(t).$$

Ejercicio simple. Demostrar que

$$\liminf_{t \rightarrow x^+} f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{t \in A \cap (x, x+\delta)} f(t).$$

Ejercicio simple. Demostrar que

$$\liminf_{t \rightarrow x^+} f(t) \leq \limsup_{t \rightarrow x^+} f(t).$$

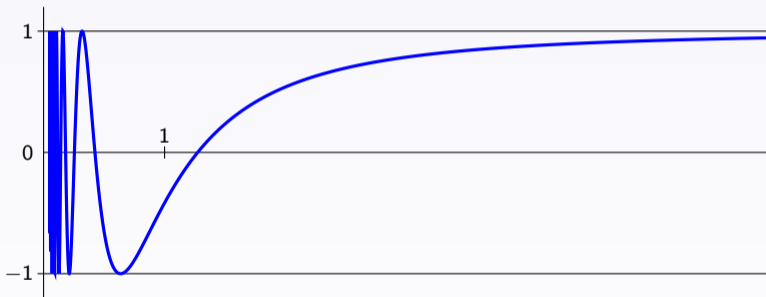
Ejercicio muy bueno. Demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow x^+} f(t) = v \iff \liminf_{t \rightarrow x^+} f(t) = \limsup_{t \rightarrow x^+} f(t) = v.$$

Ejemplo

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \cos \frac{2}{x}.$$

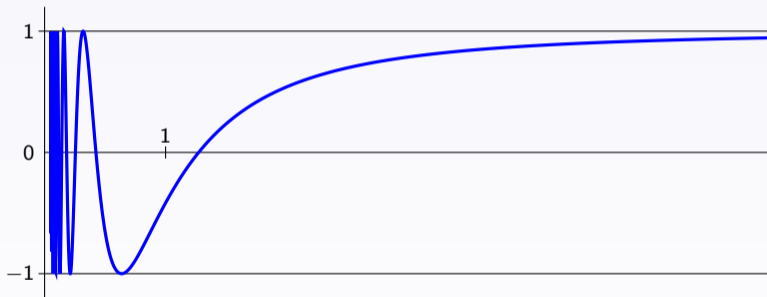
La gráfica no se puede dibujar bien cerca de $x = 0$.



Ejemplo

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \cos \frac{2}{x}.$$

La gráfica no se puede dibujar bien cerca de $x = 0$.



Calculamos $\liminf_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $g(\delta) := \inf_{x \in (0, \delta)} f(x) = \inf_{x \in (0, \delta)} \cos \frac{2}{x}$.

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $g(\delta) := \inf_{x \in (0, \delta)} f(x) = \inf_{x \in (0, \delta)} \cos \frac{2}{x}$.

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos \frac{2}{x} \geq -1$.

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $g(\delta) := \inf_{x \in (0, \delta)} f(x) = \inf_{x \in (0, \delta)} \cos \frac{2}{x}$.

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos \frac{2}{x} \geq -1$.

Por otro lado, consideremos la sucesión $t_k := \frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{N}$.

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $g(\delta) := \inf_{x \in (0, \delta)} f(x) = \inf_{x \in (0, \delta)} \cos \frac{2}{x}$.

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos \frac{2}{x} \geq -1$.

Por otro lado, consideremos la sucesión $t_k := \frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{N}$.

En los puntos t_k la función f alcanza su valor mínimo: $f(t_k) = \cos((2k+1)\pi) = -1$.

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $g(\delta) := \inf_{x \in (0, \delta)} f(x) = \inf_{x \in (0, \delta)} \cos \frac{2}{x}$.

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos \frac{2}{x} \geq -1$.

Por otro lado, consideremos la sucesión $t_k := \frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{N}$.

En los puntos t_k la función f alcanza su valor mínimo: $f(t_k) = \cos((2k+1)\pi) = -1$.

Pongamos $m := \lfloor \frac{1}{\pi\delta} \rfloor + 1$.

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $g(\delta) := \inf_{x \in (0, \delta)} f(x) = \inf_{x \in (0, \delta)} \cos \frac{2}{x}$.

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos \frac{2}{x} \geq -1$.

Por otro lado, consideremos la sucesión $t_k := \frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{N}$.

En los puntos t_k la función f alcanza su valor mínimo: $f(t_k) = \cos((2k+1)\pi) = -1$.

Pongamos $m := \lfloor \frac{1}{\pi\delta} \rfloor + 1$. Entonces $t_m \in (0, \delta)$:

$$m > \frac{1}{\pi\delta},$$

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $g(\delta) := \inf_{x \in (0, \delta)} f(x) = \inf_{x \in (0, \delta)} \cos \frac{2}{x}$.

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos \frac{2}{x} \geq -1$.

Por otro lado, consideremos la sucesión $t_k := \frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{N}$.

En los puntos t_k la función f alcanza su valor mínimo: $f(t_k) = \cos((2k+1)\pi) = -1$.

Pongamos $m := \lfloor \frac{1}{\pi\delta} \rfloor + 1$. Entonces $t_m \in (0, \delta)$:

$$m > \frac{1}{\pi\delta}, \quad t_m = \frac{2}{(2m+1)\pi} < \frac{1}{m\pi} < \delta.$$

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $g(\delta) := \inf_{x \in (0, \delta)} f(x) = \inf_{x \in (0, \delta)} \cos \frac{2}{x}$.

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos \frac{2}{x} \geq -1$.

Por otro lado, consideremos la sucesión $t_k := \frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{N}$.

En los puntos t_k la función f alcanza su valor mínimo: $f(t_k) = \cos((2k+1)\pi) = -1$.

Pongamos $m := \lfloor \frac{1}{\pi\delta} \rfloor + 1$. Entonces $t_m \in (0, \delta)$:

$$m > \frac{1}{\pi\delta}, \quad t_m = \frac{2}{(2m+1)\pi} < \frac{1}{m\pi} < \delta.$$

Luego $g(\delta) = -1$ para cada $\delta > 0$.

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $g(\delta) := \inf_{x \in (0, \delta)} f(x) = \inf_{x \in (0, \delta)} \cos \frac{2}{x}$.

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos \frac{2}{x} \geq -1$.

Por otro lado, consideremos la sucesión $t_k := \frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{N}$.

En los puntos t_k la función f alcanza su valor mínimo: $f(t_k) = \cos((2k+1)\pi) = -1$.

Pongamos $m := \lfloor \frac{1}{\pi\delta} \rfloor + 1$. Entonces $t_m \in (0, \delta)$:

$$m > \frac{1}{\pi\delta}, \quad t_m = \frac{2}{(2m+1)\pi} < \frac{1}{m\pi} < \delta.$$

Luego $g(\delta) = -1$ para cada $\delta > 0$. Conclusión final:

Solución del ejemplo

Para cada $\delta > 0$, calculemos $g(\delta) := \inf_{x \in (0, \delta)} f(x) = \inf_{x \in (0, \delta)} \cos \frac{2}{x}$.

Por un lado, para cada $x > 0$ tenemos $\cos \frac{2}{x} \geq -1$.

Por otro lado, consideremos la sucesión $t_k := \frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{N}$.

En los puntos t_k la función f alcanza su valor mínimo: $f(t_k) = \cos((2k+1)\pi) = -1$.

Pongamos $m := \lfloor \frac{1}{\pi\delta} \rfloor + 1$. Entonces $t_m \in (0, \delta)$:

$$m > \frac{1}{\pi\delta}, \quad t_m = \frac{2}{(2m+1)\pi} < \frac{1}{m\pi} < \delta.$$

Luego $g(\delta) = -1$ para cada $\delta > 0$. Conclusión final: $\liminf_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (-1) = -1$.